

## I. Introduction

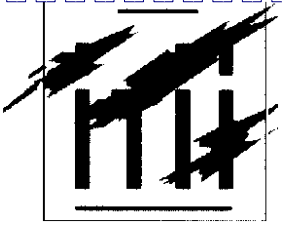
But de l'Automatique :

- Décharger l'homme des charges répétitives
- Améliorer le rendement d'une production
- Améliorer la précision, la qualité des tâches à effectuer

→ Utilisation de **calculateurs, automates, circuits électroniques**

→ contrôle des procédés.

✦ réalisations d'asservissements → **Amélioration du contrôle**



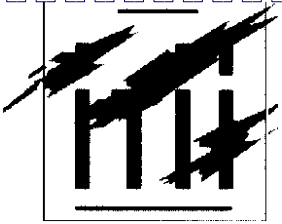
## Exemples d'asservissements :

### ① Température d'une pièce

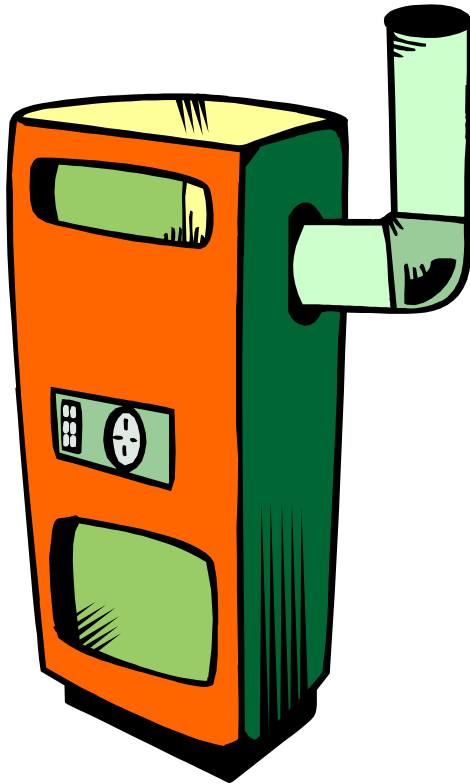
#### *Sans asservissement :*

- aucun contrôle de la température
- "réglage" par ajout/suppression de bois.





**Amélioration :** Utilisation d'un foyer fermé à *régulation* de tirage mécanique

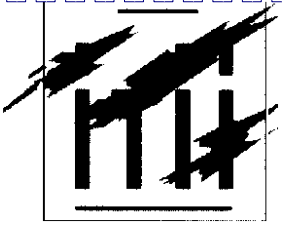


→ la température d'eau modifie la combustion

**Problème :**

- manque de précision
- si  $T^{\circ}\text{C}$  extérieure modifiée  $\Rightarrow$   $T^{\circ}\text{C}$  intérieure modifiée  
(pour une même  $T^{\circ}\text{C}$  d'eau)

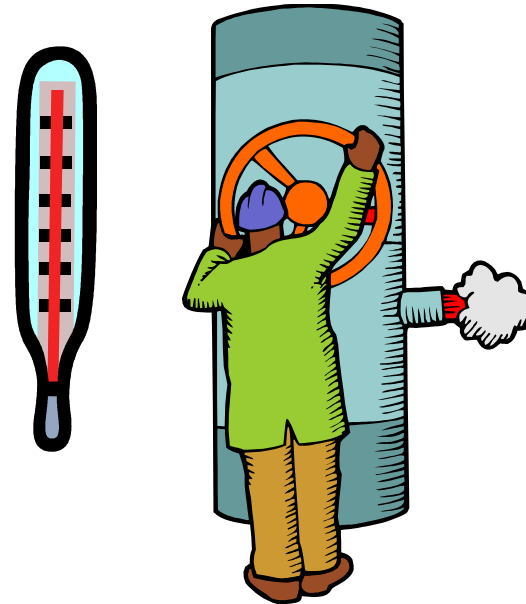
*La grandeur contrôlée n'est pas la grandeur observée*



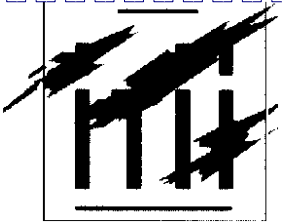
**Solution :** contrôler la température de la pièce

→ nécessite :

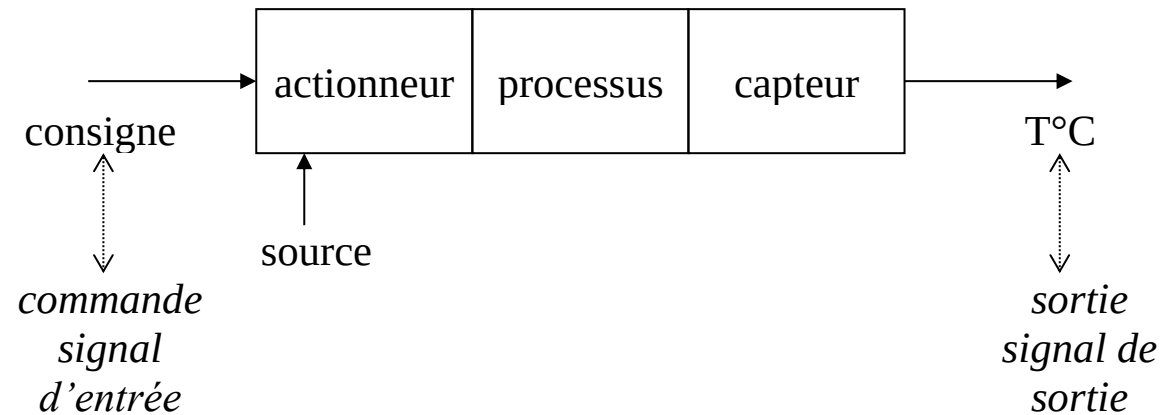
- un thermomètre
- une chaudière commandée



*Un dispositif permet de modifier la commande de la chaudière à partir de la lecture du thermomètre*

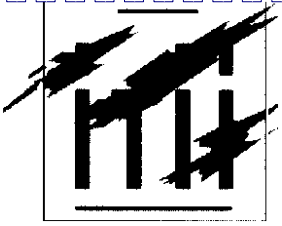


**Modèle du système :**



**Système mono variable**

1 entrée / 1 sortie



## Notions de boucle ouverte / boucle fermée

Exemple ② : la douche



2 robinets :

*Méthodes pour prendre la douche à la bonne température :*

## **A) Réglage des robinets à une position prédéfinie**

→ Température obtenue approximative

fortement dépendante des paramètres extérieurs ( $T^{\circ}\text{C}$  eau froide/chaude, pression,...)  
consigne mal suivie

→ commande en **boucle ouverte**

*Méthodes pour prendre la douche à la bonne température :*

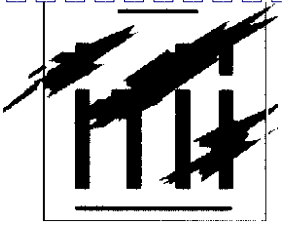
## **B) Réglage des robinets en contrôlant la température avec la main**

→ correction de la position des robinets en fonction de  $T^{\circ}\text{C}$

différence entre  $T^{\circ}\text{C}$  souhaitée et  $T^{\circ}\text{C}$  obtenue → **erreur**

→ commande en **boucle fermée**





Asservissement : *minimisation de l'erreur* → nécessite un capteur (ici, la main)

Comparaison entre consigne et sortie → commande en **boucle fermée**

*La sortie modifie la commande du système*

**Intérêts de la boucle fermée :**

- *Précision* accrue (moins d'erreur)
- Réduction des effets dus aux *perturbations*
- Augmentation de la *rapidité* du système

**Mais** tendance à l'*instabilité*, à l'oscillation.

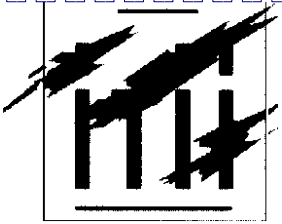
## II. Fonctions de transfert

- Décrire le comportement du système
- Signal appliqué en entrée  $\Rightarrow$  valeur de la sortie.

## ***II.1. Etude temporelle***

### II.1.a. Signaux de commande

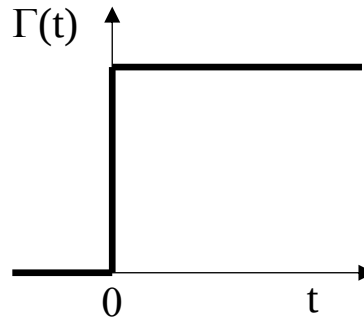
- Signaux type
- Permettent de caractériser le système
- Facilitent la comparaison des résultats obtenus



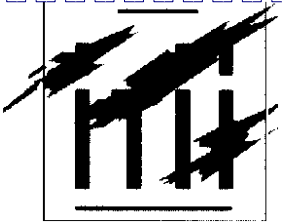
- **L'échelon** (ou signal d'Heaviside)

L'échelon est défini par :

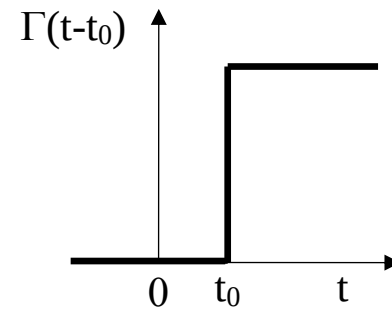
$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$



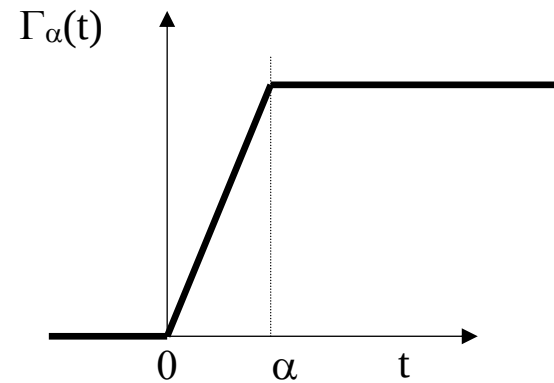
Un échelon d'amplitude 1 est dit unitaire.

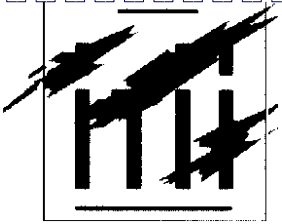


$\Gamma(t-t_0)$  échelon débutant en  $t_0$  :



Echelon peut être obtenu à partir d'une rampe saturée  $\Gamma_\alpha$ , avec  $\alpha \rightarrow 0$  :

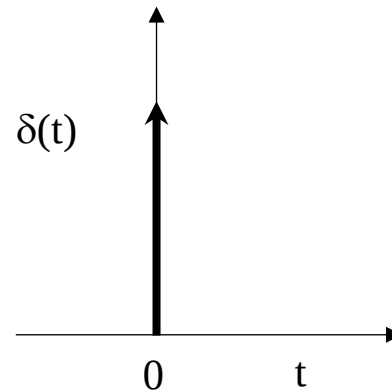


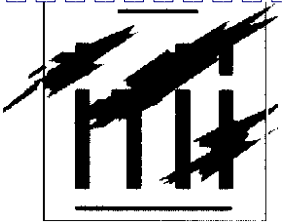


## - L'impulsion de **Dirac**

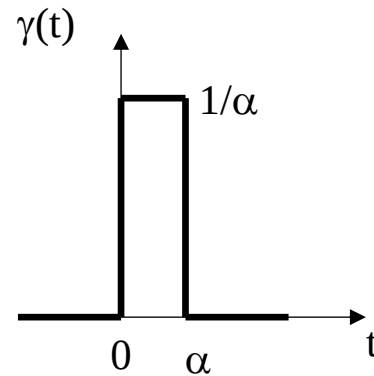
- amplitude infinie
- durée infiniment courte

Notation :  $\delta(t)$ .

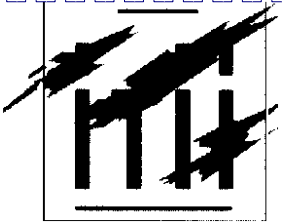




Peut être obtenue à partir de  $\gamma(t)$  avec  $\alpha \rightarrow 0$  :

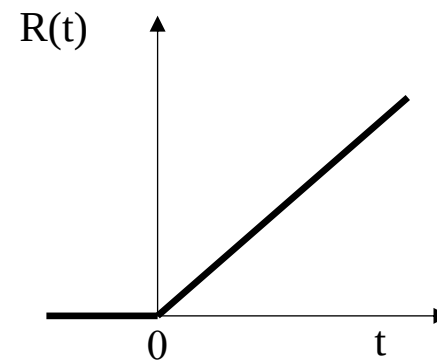


Remarque :  $\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) \cdot dt = 1$  et  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$   $\Rightarrow \gamma(t)$  est la dérivée de  $\Gamma_{\alpha}(t) \Rightarrow \delta(t) = \frac{d}{dt} \Gamma(t)$

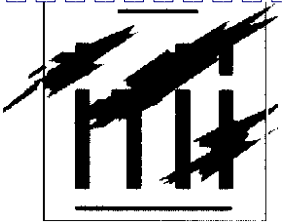


## - La rampe

$$R(t) = a t \quad \text{pour } t > 0.$$







- **Signaux périodiques**

*sinus et cosinus*

→ caractérisés par l'amplitude et la pulsation.

## II.1.b. Circuits du premier ordre

→ Régis par une équation différentielle du premier ordre.

**Exemples :**

Circuit R-C : 
$$E = RC \frac{dV_C}{dt} + V_C$$

Circuit R-L : 
$$E = R \cdot i + L \frac{di}{dt}$$

Entraînement avec frottement visqueux : 
$$C_m - f \cdot \omega = J \cdot \dot{\omega}$$

Ces systèmes peuvent se mettre sous la forme : 
$$G = b \cdot x + a \cdot \frac{dx}{dt}$$

où G est le signal appliqué au système.

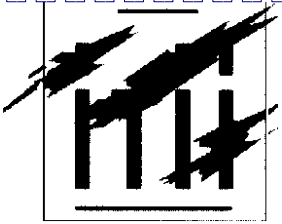
Résolution de l'équation **sans second membre** :  $x = K \cdot e^{-\frac{b}{a}t}$

Si G est un échelon :  $G=E$  ( $t \geq 0$ )

$G=0$  ( $t < 0$ )

**Solution particulière** obtenue à l'état stable  $\rightarrow \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow E = b \cdot x$ .

**Solution générale** de l'équation :  $x = K \cdot e^{-\frac{b}{a}t} + \frac{E}{b}$ .



K obtenue en  $t=0$  : en  $t=0, x=x_0 \Rightarrow K = x_0 - \frac{E}{b}$

**Solution complète :**

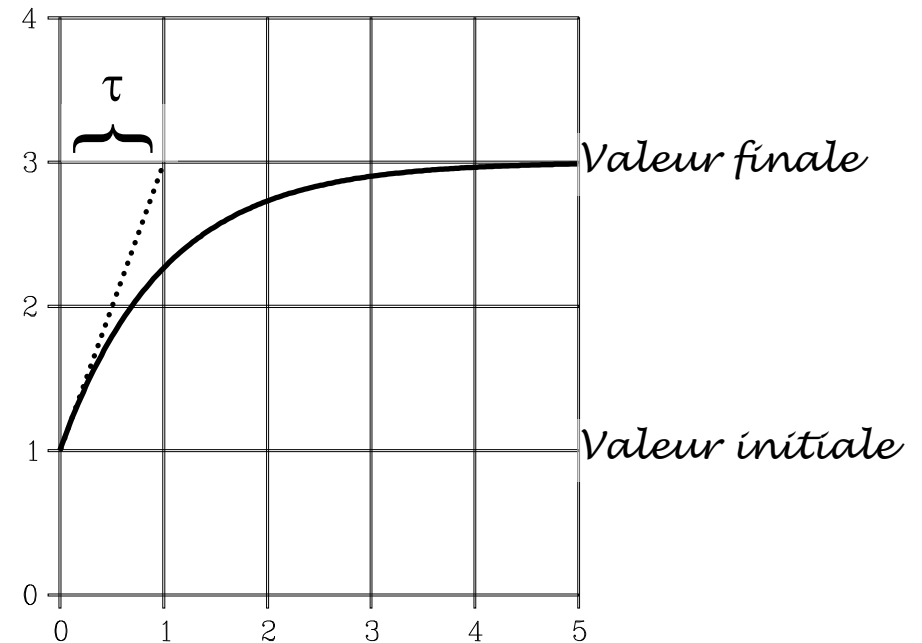
$$x = \left( x_0 - \frac{E}{b} \right) \cdot e^{-\frac{b}{a}t} + \frac{E}{b}$$

Peut se mettre sous la forme :

$$x = (x_0 - x_\infty) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + x_\infty$$

**Remarques :**

- pente à l'origine non nulle.
- pas de dépassement ni oscillations.
- La construction graphique simplifiée en traçant au préalable les tangentes de la courbe.



## II.1.c. Circuits du second ordre

Régis par une équation de la forme :  $a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d$

Système **sans second membre** :

On recherche des solutions de la forme  $x = e^{\alpha t} \Rightarrow \dot{x} = \alpha \cdot x$  et  $\ddot{x} = \alpha^2 \cdot x$ .

Le système à résoudre devient :  $a \cdot \alpha^2 + b \cdot \alpha + c = 0$ .

→ 2 solutions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2 \Rightarrow$  solution générale de l'équation sans second membre :  $x = A \cdot e^{\alpha_1 t} + B \cdot e^{\alpha_2 t}$

Discriminant de l'équation du second degré :  $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

3 cas :

1.  $\Delta > 0$  (régime *apériodique*) :

$$\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ sont réelles : } \alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

a, b et c positifs  $\Rightarrow \alpha_1$  et  $\alpha_2$  négatives et  $\alpha_1 > \alpha_2$ .

**Solution particulière :**  $x = \frac{d}{c}$  (en régime établi)

Solution de l'équation :  $x = A \cdot e^{\alpha_1 t} + B \cdot e^{\alpha_2 t} + \frac{d}{c}$

A et B constantes déterminées à partir de  $x(0)$  et  $\dot{x}(0)$

## 2. $\Delta = 0$ (régime critique) :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$$

Continuité avec régime précédent,  $\rightarrow \alpha_{1,2} = \alpha \pm \varepsilon$  (avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

$$\Rightarrow x = A \cdot e^{\alpha_1 t} + B \cdot e^{\alpha_2 t} = e^{\alpha t} \cdot (A \cdot e^{\varepsilon t} + B \cdot e^{-\varepsilon t})$$

Puisque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $x = e^{\alpha t} \cdot (A + B + \varepsilon \cdot (A - B) \cdot t)$

$$\Rightarrow \boxed{x = e^{\alpha t} \cdot (A' + B' \cdot t)}$$

### 3. $\Delta < 0$ (régime *pseudo-périodique*) :

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont complexes :  $\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm j \cdot \sqrt{-\Delta}}{2 \cdot a}$

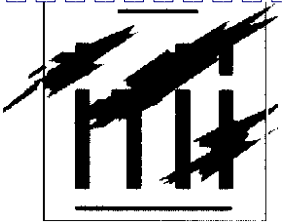
Solution de l'équation sans second membre :  $x = A \cdot e^{\alpha_1 t} + B \cdot e^{\alpha_2 t} \Rightarrow x = A'' \cdot e^{\frac{-b}{2a}t} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t + \varphi\right)$

En ajoutant la solution particulière, on obtient finalement :

$$x = A'' \cdot e^{\frac{-b}{2a}t} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t + \varphi\right) + \frac{d}{c}$$

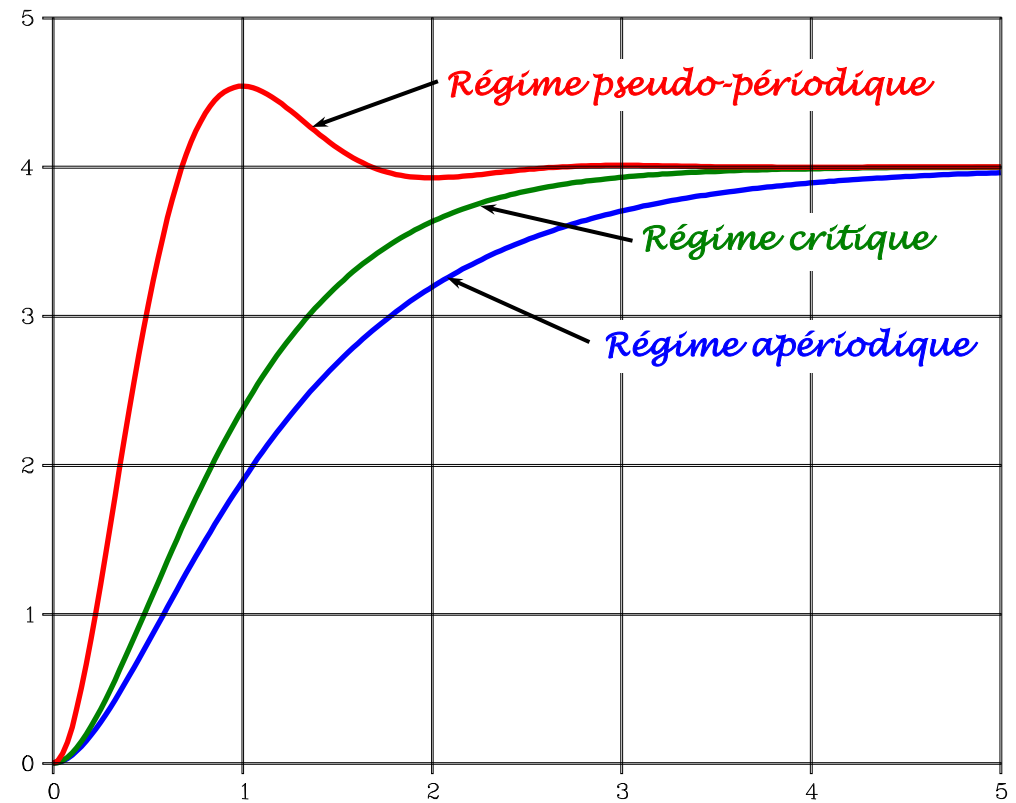
$A''$  et  $\varphi$  déterminées à partir de  $x(0)$  et  $\dot{x}(0)$ .





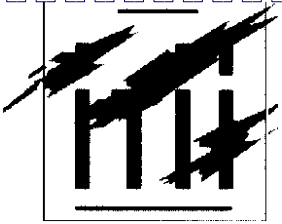
## Remarques :

- Pente à l'origine nulle.
- Dépassements possibles.



## ***II.2. Transformation de Laplace***

Outil *mathématique* pour l'étude de l'évolution des systèmes  
domaines **temporel et fréquentiel**



### II.2.a. Définition

$x(t)$  étant un signal nul pour  $t < 0$ ,

$$L(x(t)) = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$s$  : variable complexe de la forme :  $s = \sigma + j\omega$ , avec  $\sigma \geq 0$ .

Transformation **bijective**  $\Rightarrow$  transformée de Laplace inverse :

$$x(t) = L^{-1}(X(s)) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \cdot e^{ts} \cdot ds$$

## II.2.b. Propriétés

- **Linéarité**

$$L(a \cdot x(t) + b \cdot y(t)) = a \cdot X(s) + b \cdot Y(s) , \forall a, b \in \mathbb{R}$$

- **Dérivation**

$$L(\dot{x}(t)) = s \cdot X(s) - x(0^+)$$

et plus généralement :

$$L(x^{(n)}(t)) = s^n \cdot X(s) - s^{n-1} \cdot x(0^+) - s^{n-2} \cdot x^{(1)}(0^+) - \dots - x^{(n-1)}(0^+)$$

- **Intégration**

$$L\left(\int_0^t x(\tau) \cdot d\tau\right) = \frac{X(s)}{s}$$

- **Théorème de la valeur initiale**

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot X(s)) = x(0^+)$$

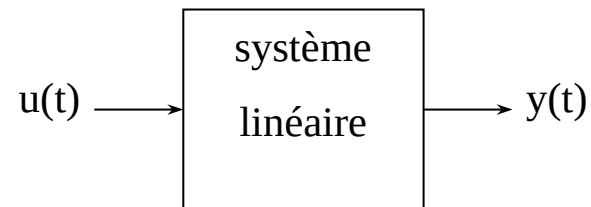
- **Théorème de la valeur finale**

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot X(s)) = x(\infty)$$

- **Retard temporel**

$$L(x(t - \tau)) = e^{-s\tau} \cdot X(s)$$

## II.2.c. Fonction de transfert



$$Y(s) = F(s) \cdot U(s)$$

$F(s)$  est la fonction de transfert du système

→ correspond à la réponse du système soumis à une impulsion.

Equation différentielle du système :

$$a_0 y(t) + a_1 y^{(1)}(t) + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + y^{(n)}(t) = b_0 u(t) + b_1 u^{(1)}(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t) \quad \text{avec } m \leq n,$$

En appliquant la transformée de Laplace, on trouve :

$$a_0 Y + a_1 sY + \dots + a_{n-1} s^{n-1} Y + s^n Y = b_0 U + b_1 sU + \dots + b_m s^m U$$

La fonction de transfert du système s'écrit alors :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

→ fraction rationnelle de la variable complexe  $s$  :  $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.$

Racines du numérateur : **zéros**.

Racines du dénominateur : **pôles**.

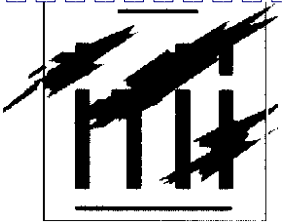
## II.2.d. Systèmes du premier ordre

Régis par :  $T \cdot \dot{y} + y = K \cdot u$

$\Rightarrow s \cdot T \cdot Y + Y = K \cdot U$  (dans Laplace)

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + T \cdot s}$$





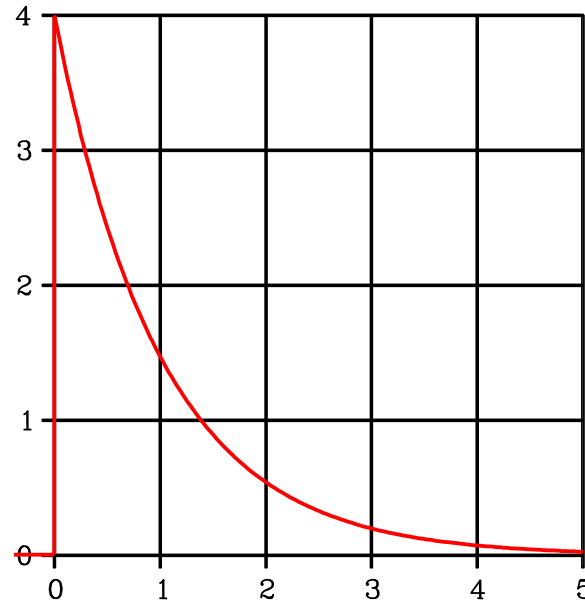
- Réponse à une impulsion

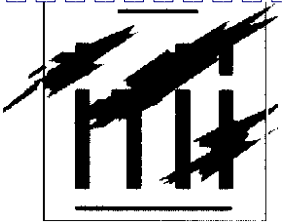
$$u(t) = A \cdot \delta(t)$$

$$\Rightarrow U(s) = A \cdot L(\delta(t)) = A$$

$$\text{et } Y(s) = \frac{K \cdot A}{1 + T \cdot s}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{K \cdot A}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$





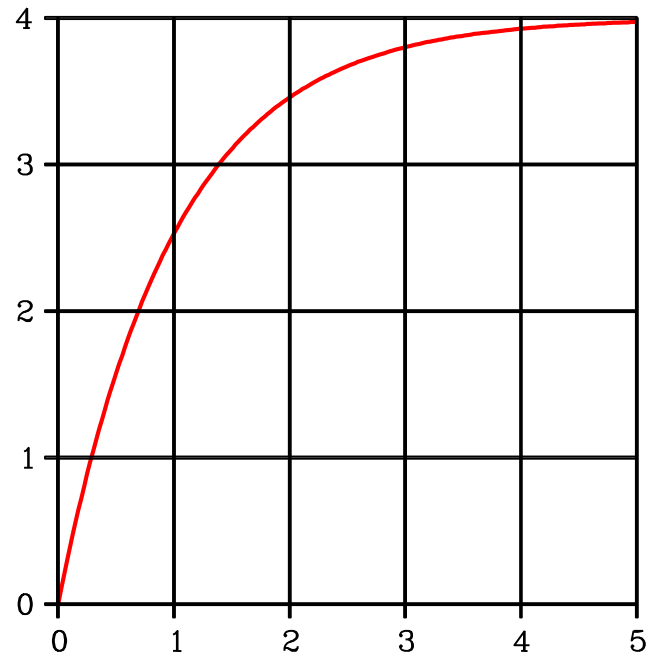
- Réponse à un échelon

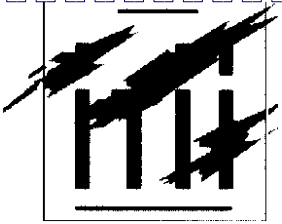
$$u(t) = A\Gamma(t) \Rightarrow U(s) = \frac{A}{s}$$

$$\text{et } Y(s) = H(s) \cdot U(s) = \frac{A \cdot K}{s \cdot (1 + T \cdot s)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{1 + T \cdot s}$$

$$\Rightarrow y(t) = A \cdot K \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$





- Réponse à une rampe

$$(u(t) = A \cdot t) \Rightarrow U(s) = \frac{A}{s^2}$$

$$\text{et } Y(s) = \frac{K \cdot A}{s^2 \cdot (1 + s \cdot T)}$$

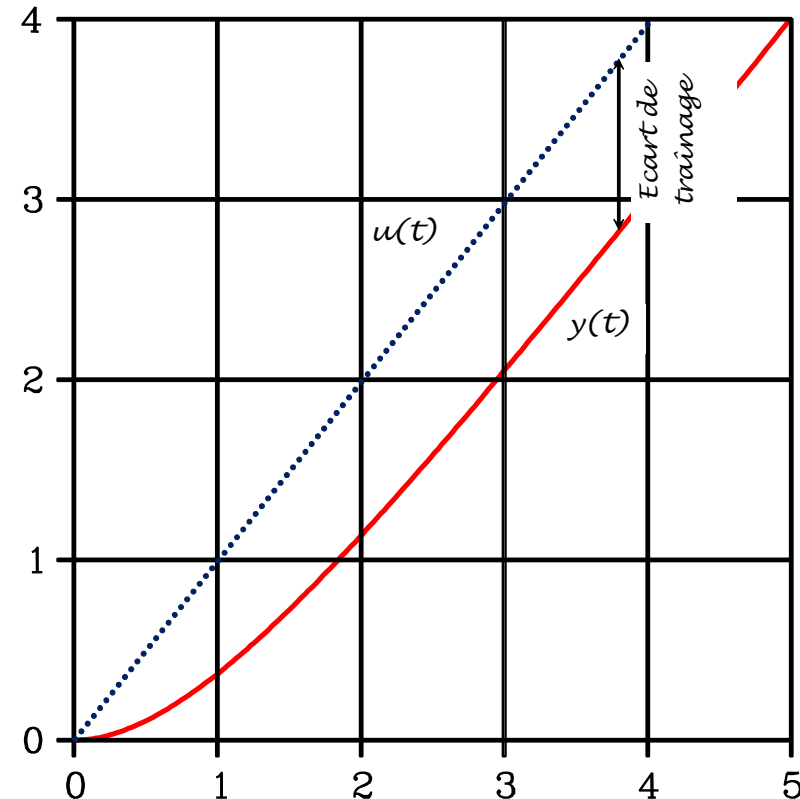
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{1 + T \cdot s}$$

$$\Rightarrow y(t) = K \cdot A \cdot \left( t - T + T \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

Rem. :  $T \cdot e^{-\frac{t}{T}} \rightarrow 0$  quand  $t > 3T$

$$\Rightarrow y(t) \rightarrow K \cdot A \cdot (t - T)$$

→ image de  $u(t)$ , retardée de  $T$ .



### II.2.e. Systèmes du second ordre

$$a_2 \cdot \ddot{y} + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y = b_0 \cdot u$$

→ circuits R-L-C : 
$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du}{dt}$$

→ masse/ressort/amortisseur : 
$$m \cdot \ddot{x} + f \cdot \dot{x} + k \cdot x = F$$

La transformation de Laplace donne :

$$a_2 \cdot s^2 \cdot Y + a_1 \cdot s \cdot Y + a_0 \cdot Y = b_0 \cdot U$$

⇒ Fonction de transfert du système : 
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$$

Forme normalisée :

$$H(s) = \frac{K}{1 + 2 \cdot m \cdot \frac{s}{\omega_0} + \left( \frac{s}{\omega_0} \right)^2}$$

K : gain statique

m : coefficient d'amortissement

$\omega_0$  : pulsation caractéristique

$$H(s) = \frac{K}{1 + 2 \cdot m \cdot \frac{s}{\omega_0} + \left( \frac{s}{\omega_0} \right)^2}$$

Recherche des pôles de  $H(s)$  :

$$\Rightarrow 1 + 2 \cdot m \cdot x + x^2 = 0 \quad \left( \text{en posant } x = \frac{s}{\omega_0} \right)$$

$$\Delta' = m^2 - 1$$

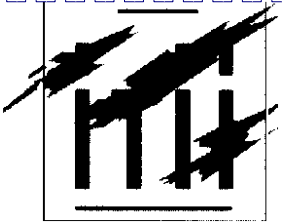
- Si  $m > 1$  :

$$\Delta' > 0.$$

$$\Rightarrow 2 \text{ racines réelles : } s_{1,2} = \omega_0 \cdot \left( -m \pm \sqrt{m^2 - 1} \right)$$

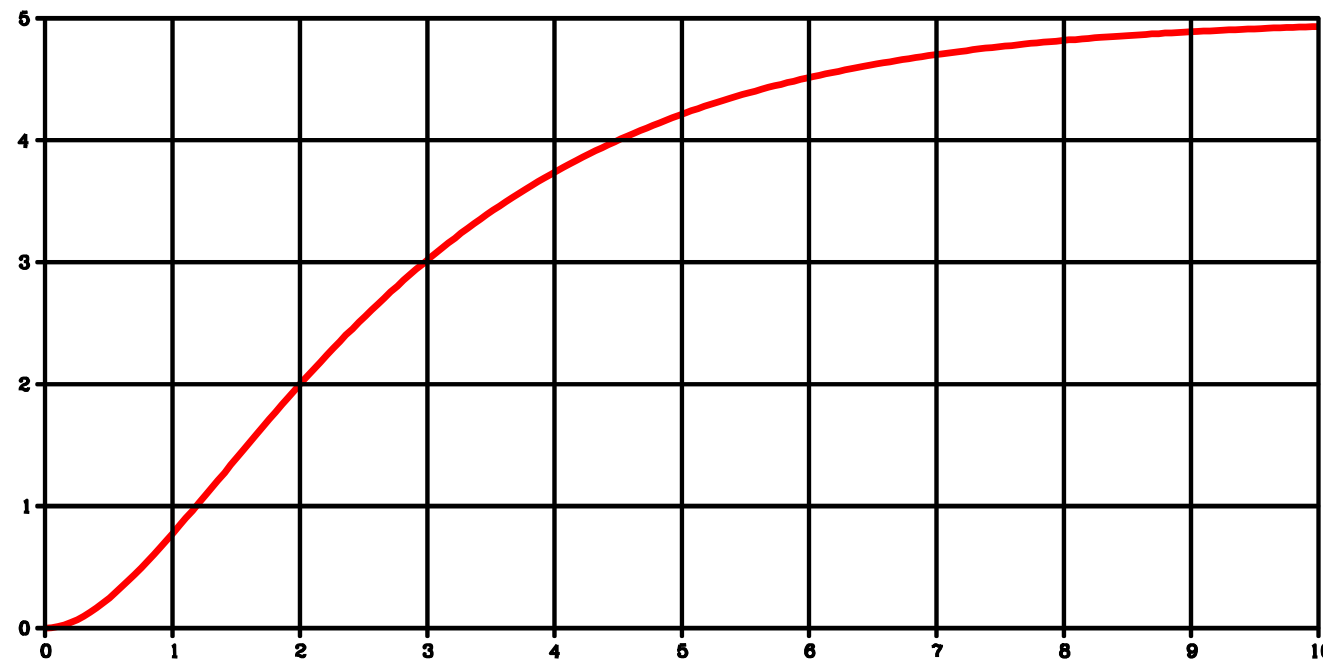
$$\rightarrow \text{Pôles réels négatifs : } \Rightarrow s_1 = -\frac{1}{T_1} \text{ et } s_2 = -\frac{1}{T_2}.$$

$$\text{et } H(s) = \frac{K}{(1 + T_1 \cdot s) \cdot (1 + T_2 \cdot s)}$$



$$u(t) \text{ échelon d'amplitude } A \Rightarrow Y(s) = \frac{K \cdot A}{s \cdot (1 + T_1 \cdot s) \cdot (1 + T_2 \cdot s)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{1 + T_1 \cdot s} + \frac{c}{1 + T_2 \cdot s}$$

$$\Rightarrow y(t) = K \cdot A \cdot \left( 1 + \frac{T_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}}{T_2 - T_1} + \frac{T_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2} \right)$$



$KA=5, T_1 = 1 \text{ s et } T_2 = 2 \text{ s}$



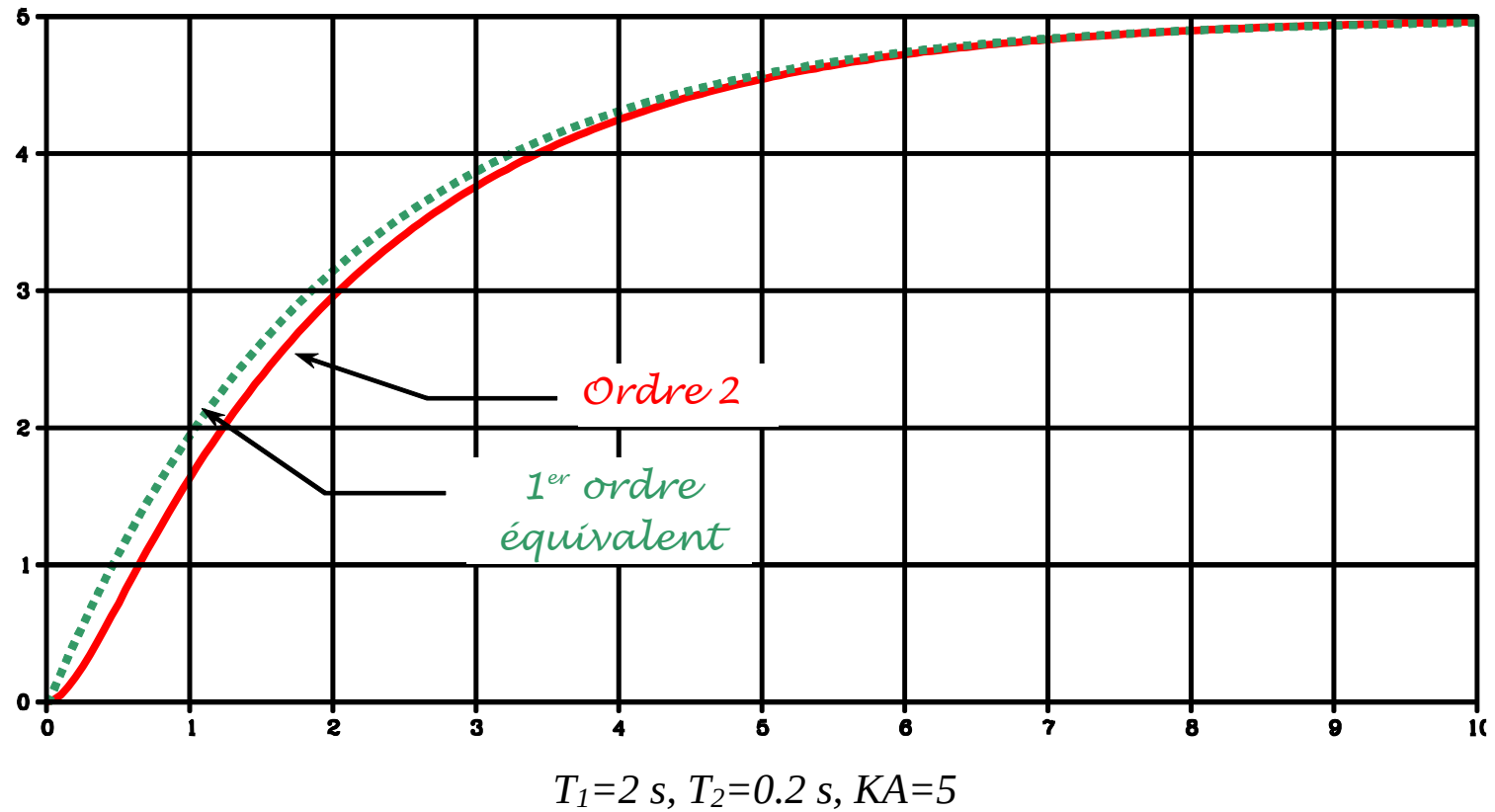
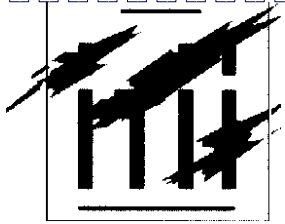
## Cas particulier :

Si un pôle est dominant (par exemple  $|s_2| \gg |s_1|$ , soit  $T_1 \gg T_2$ ),

$$y(t) \text{ devient : } y(t) = K \cdot A \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Quand } t \gg T_2 \quad (t > 3T_2) \quad \Rightarrow y(t) \approx K \cdot A \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

Le système devient très vite équivalent à un système du premier ordre :  
(constante de temps égale à  $T_1$ )

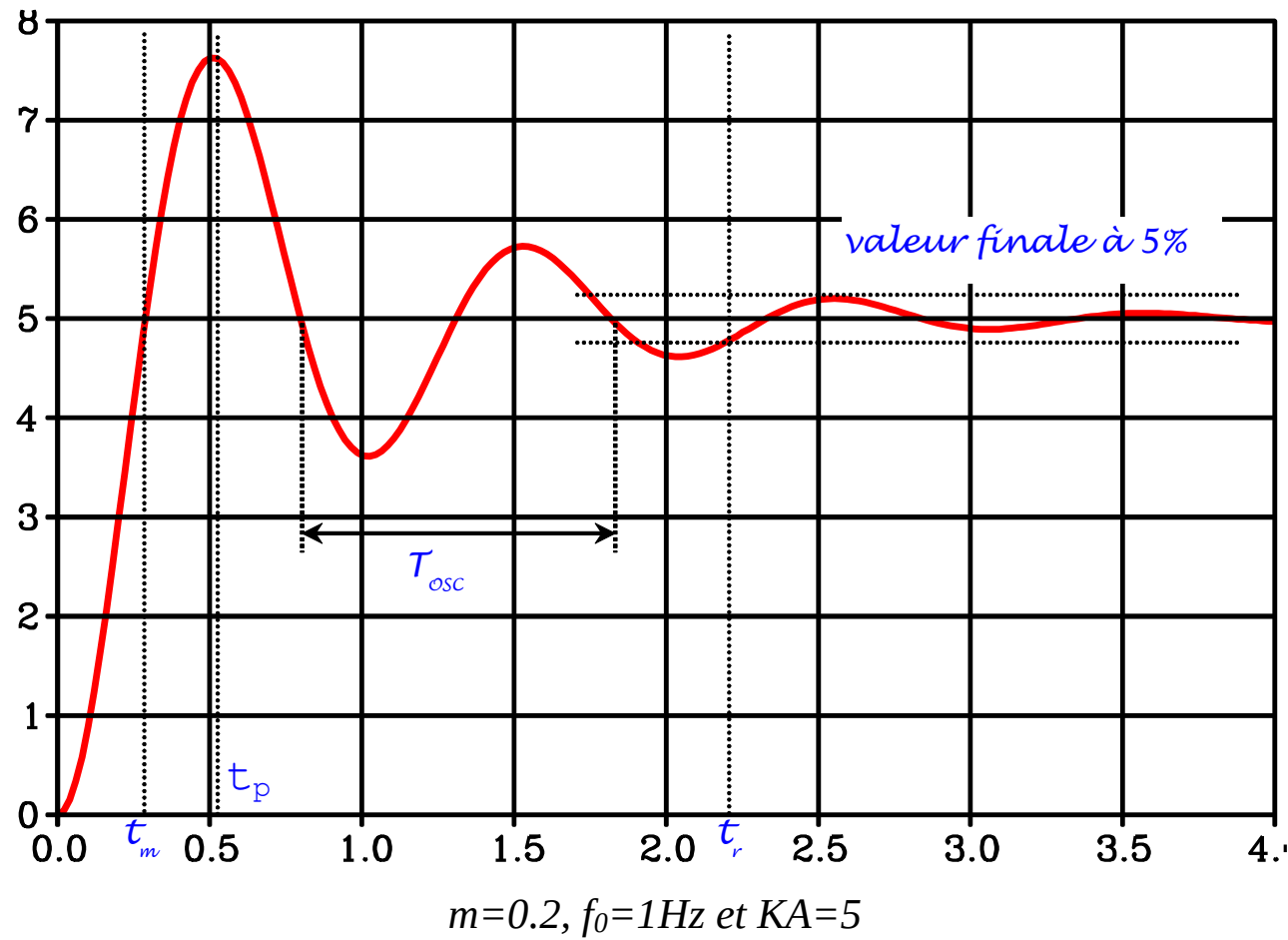


- si  $m < 1$  :

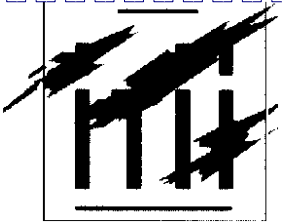
$$\Rightarrow s_{1,2} = \omega_0 \cdot \left( -m \pm j\sqrt{1-m^2} \right)$$

→ Réponse oscillatoire.

$$u(t) \text{ échelon d'amplitude } A \Rightarrow y(t) = K \cdot A \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \cdot e^{-m\omega_0 t} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot \sqrt{1-m^2} \cdot t + \arccos(m)\right) \right)$$



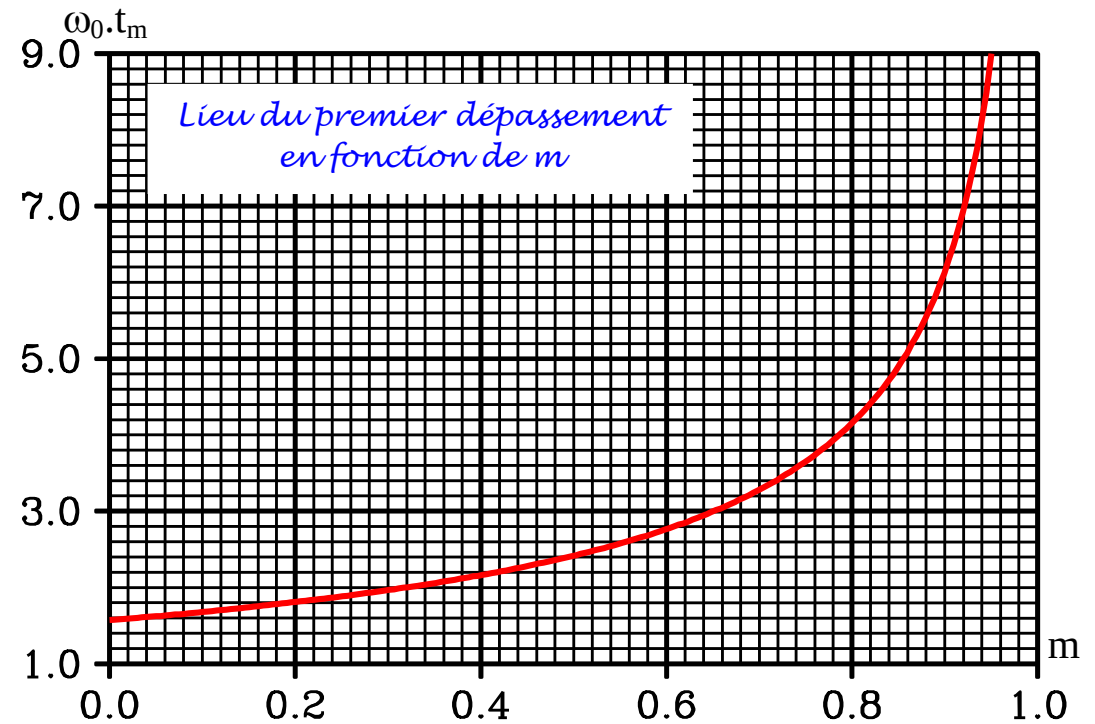
$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_{osc}}, \text{ avec } \omega_{osc} = \omega_0 \cdot \sqrt{1-m^2}.$$

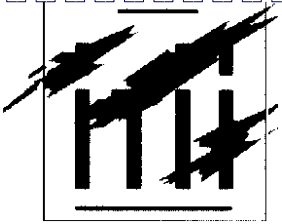


## Grandeurs intéressantes :

$t_m$  : lieu du premier dépassement

$$t_m = \frac{\pi - \arccos(m)}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2}}$$



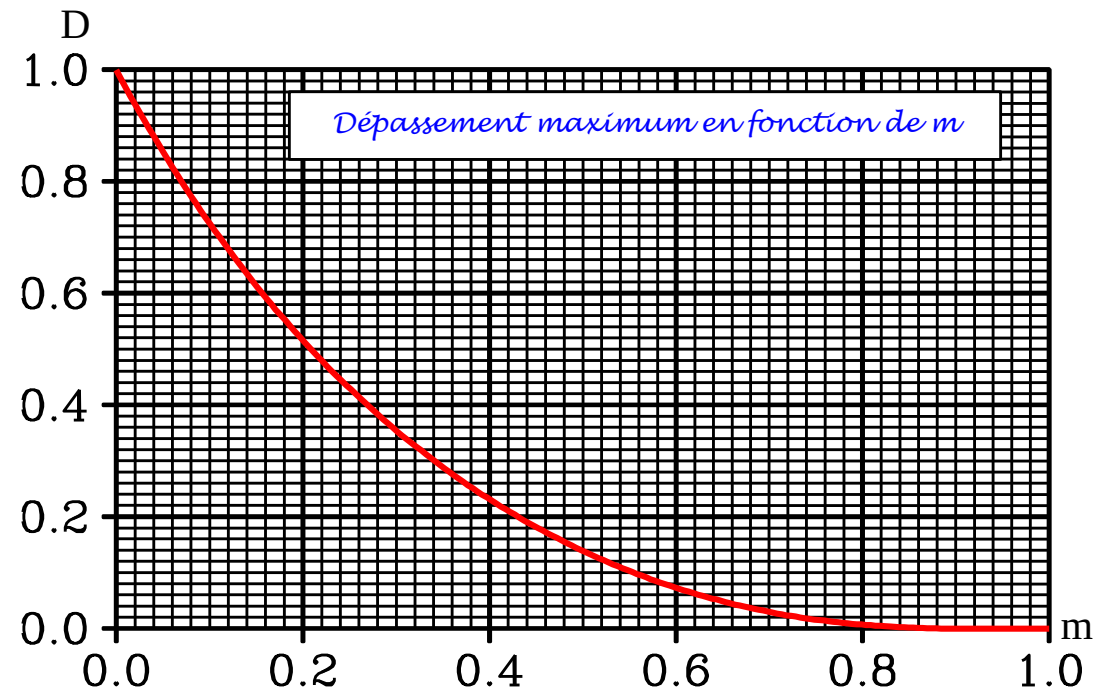


$t_p$  : lieu du premier maximum

$$D(m) = \frac{e^{-m\omega_0 t_p}}{\sqrt{1-m^2}} = \frac{e^{\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \left( \arccos(m) - \frac{3\pi}{2} \right)}}{\sqrt{1-m^2}}$$

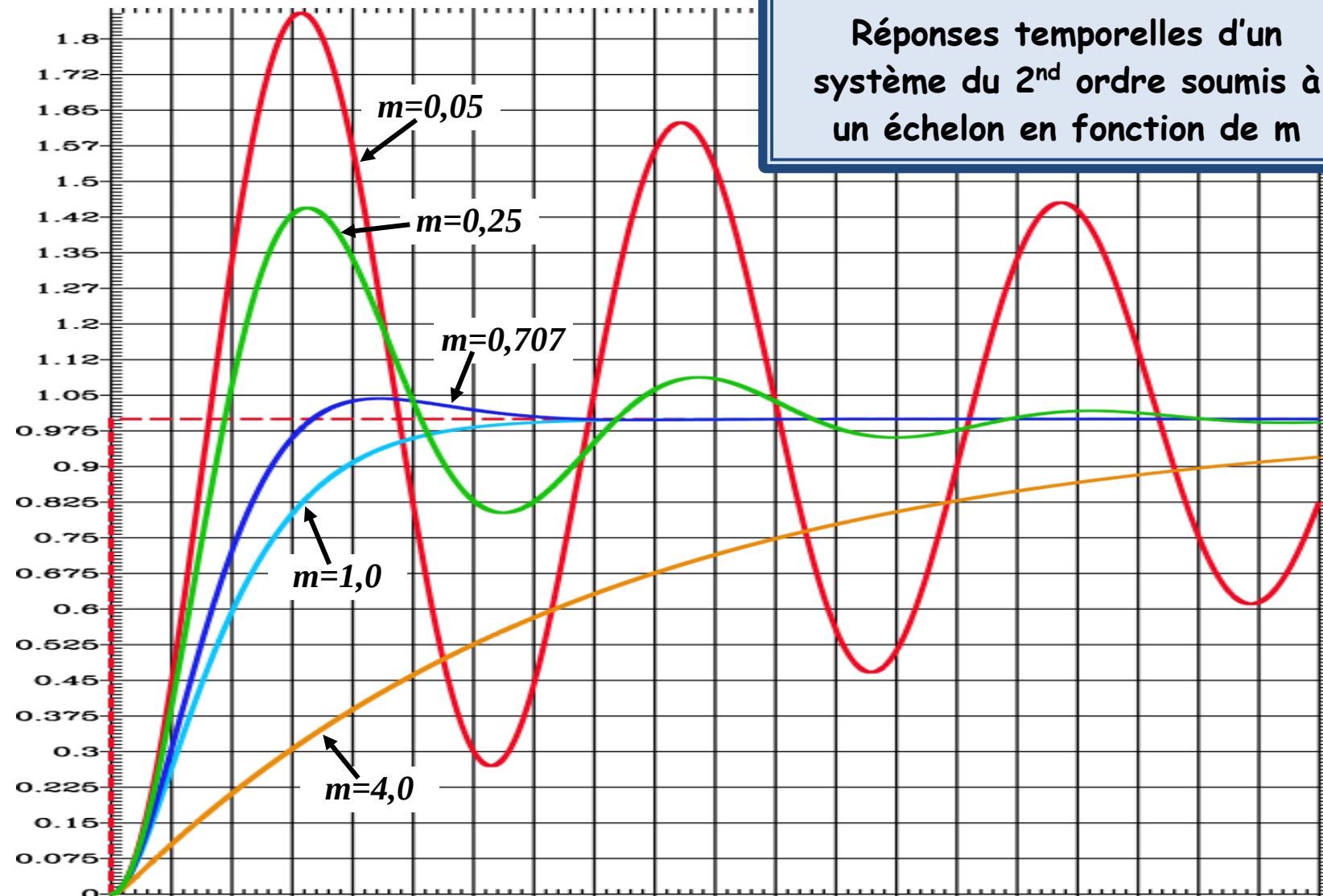
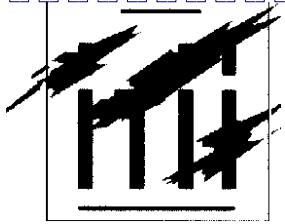
$t_r$  : temps de réponse à 5%.

$$t_r \approx \frac{1}{2m} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (\text{pour } m < 0,5)$$



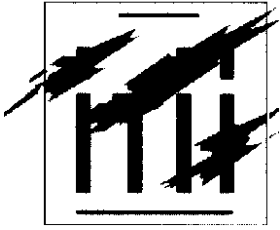
## Conclusion :

- oscillations si  $m < 1$
- si  $m > 1 \Rightarrow$  deux pôles réels
- si  $m \rightarrow 0$ ,  $\Rightarrow$  système fortement oscillatoire, pendant une durée très longue.
- La réponse du système est la plus rapide et sans dépassement pour  $m = 1$ .
- Si  $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$ , le système présente un seul dépassement, et pas d'oscillations.



Réponses temporelles d'un système du 2<sup>nd</sup> ordre soumis à un échelon en fonction de  $m$





# ASSERVISSEMENT

## Analyse fréquentielle des systèmes

### Analyse harmonique

#### Pourquoi ?

La réponse temporelle ne permet pas de prévoir :

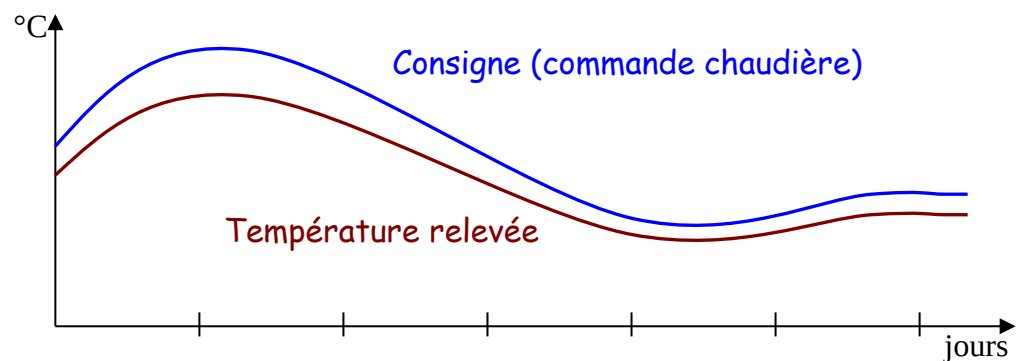
- ✚ Le comportement du système
- ✚ La stabilité

On ne fait que « constater » la réponse dans un cas particulier

#### Étude intuitive :

Système Chaudière + thermostat d'ambiance

(En l'absence de perturbations extérieures)

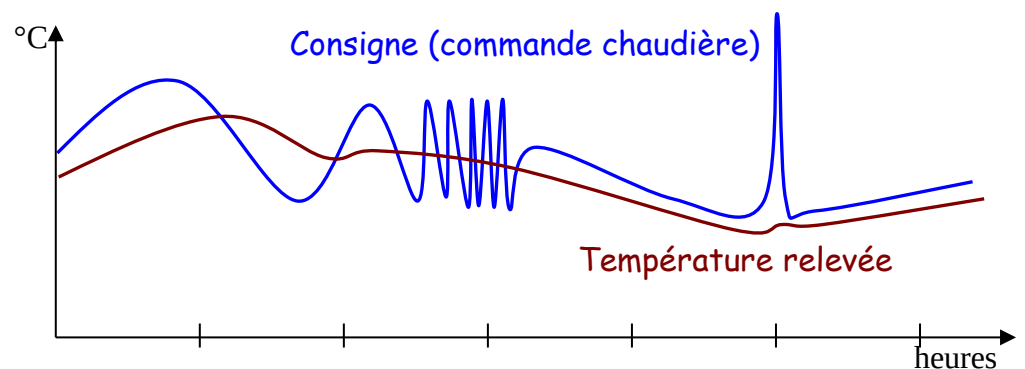


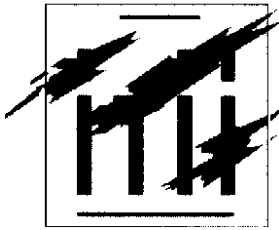
Quand la consigne évolue très lentement :

- ✚ La réponse « suit » la commande
- ✚ L'amplitude relevée peut être différente de la commande

Si la consigne évolue plus vite :

- ✚ La sortie évolue « en retard » si la consigne change moyennement vite
- ✚ L'amplitude de la sortie tend à diminuer quand les changements se font plus fréquents ou de manière brève





# ASSERVISSEMENT

## Caractérisation du système

- + On applique un signal variable (sinusoïdal) à l'entrée, d'amplitude  $U$  et de phase  $\varphi_u$
- + On fait varier lentement la fréquence
- + On observe le signal de sortie : il est sinusoïdal
- + On relève pour chaque fréquence :
  - L'amplitude  $Y$  du signal de sortie
  - La phase du signal de sortie  $\varphi_y$
- + Le retard de la sortie par rapport au signal d'entrée est donné par la différence de phase  $\varphi = \varphi_y - \varphi_u$
- + La différence des amplitudes entre la sortie et la consigne peut s'exprimer comme un gain  $G$  :

$$G = \frac{Y}{U}$$

$G = 1$  si la sortie est identique à l'entrée

$G < 1$  si la sortie est plus petite que l'entrée

$G > 1$  si la sortie est plus grande que l'entrée

## Diagrammes de Bode

Les diagrammes de Bode font la représentation de l'évolution de  $G$  et de  $\varphi$  quand la fréquence évolue

Pour des raisons de facilité de construction, on représente en réalité :

- $G_{dB} = 20 \log_{10}(G)$  en fonction de  $\log_{10}(f)$
- $\varphi$  en fonction de  $\log_{10}(f)$

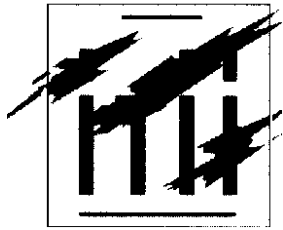
*Permet d'obtenir des droites*

## Détermination de $G$ et $\varphi$

$G$  et  $\varphi$  sont obtenus à partir de la fonction de transfert

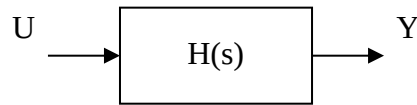
La variable  $s$  peut s'écrire sous la forme :  $s = \sigma + j\omega$

- $\sigma$  permet l'étude des régimes transitoires
- $\omega$  permet d'étudier le comportement harmonique du système



# ASSERVISSEMENT

Soit le système suivant :



$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Pour l'étude en régime harmonique, on remplace  $s$  par  $j\omega$

- ✚ Le module de  $Y(j\omega)$  donne l'amplitude de  $y(t)$
- ✚ L'argument de  $Y(j\omega)$  donne la phase de  $y(t)$
- ✚ Le module de  $U(j\omega)$  donne l'amplitude de  $u(t)$
- ✚ L'argument de  $U(j\omega)$  donne la phase de  $u(t)$

On en déduit :

$$G = \frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|} = \frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|} = |H(j\omega)|$$

$$\varphi = \varphi_Y - \varphi_U = \arg(Y(j\omega)) - \arg(U(j\omega)) = \arg\left(\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}\right) = \arg(H(j\omega))$$

## Construction des diagrammes de Bode

### Exemple 1 :

$$H_1(s) = \frac{10}{1 + 3 \cdot s} \Rightarrow H_1(j\omega) = \frac{10}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \text{ avec } \omega_1 = 1/3 = 0,333 \text{ rad/s}$$

- quand  $\omega \rightarrow 0$  :  $H_1(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow 10$

$$|H_1|_{dB}|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow 20 \cdot \log_{10}(10) = 20dB \quad \text{et} \quad \arg(H_1)|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow 0$$

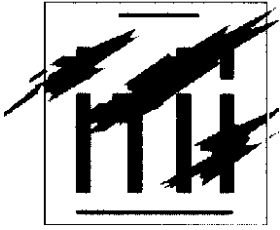
- quand  $\omega \rightarrow \infty$  :  $H_1(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{10}{j \frac{\omega}{\omega_1}} = -\frac{10 \cdot j \cdot \omega_1}{\omega}$

$$|H_1|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow 10 \frac{\omega_1}{\omega} \Rightarrow |H_1|_{dB}|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow 20 \cdot \log_{10}(10 \cdot \omega_1) - 20 \cdot \log_{10}(\omega)$$

est de la forme  $aX+b$  dans une échelle logarithmique ( $X=\log_{10}(\omega)$ )

→ équation d'une droite de pente -20 dB/décade passant par  $[\omega_1, 20dB]$

$$\text{et } \arg(H_1)|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow \arg(-j) = -\frac{\pi}{2}$$



## ASSERVISSEMENT

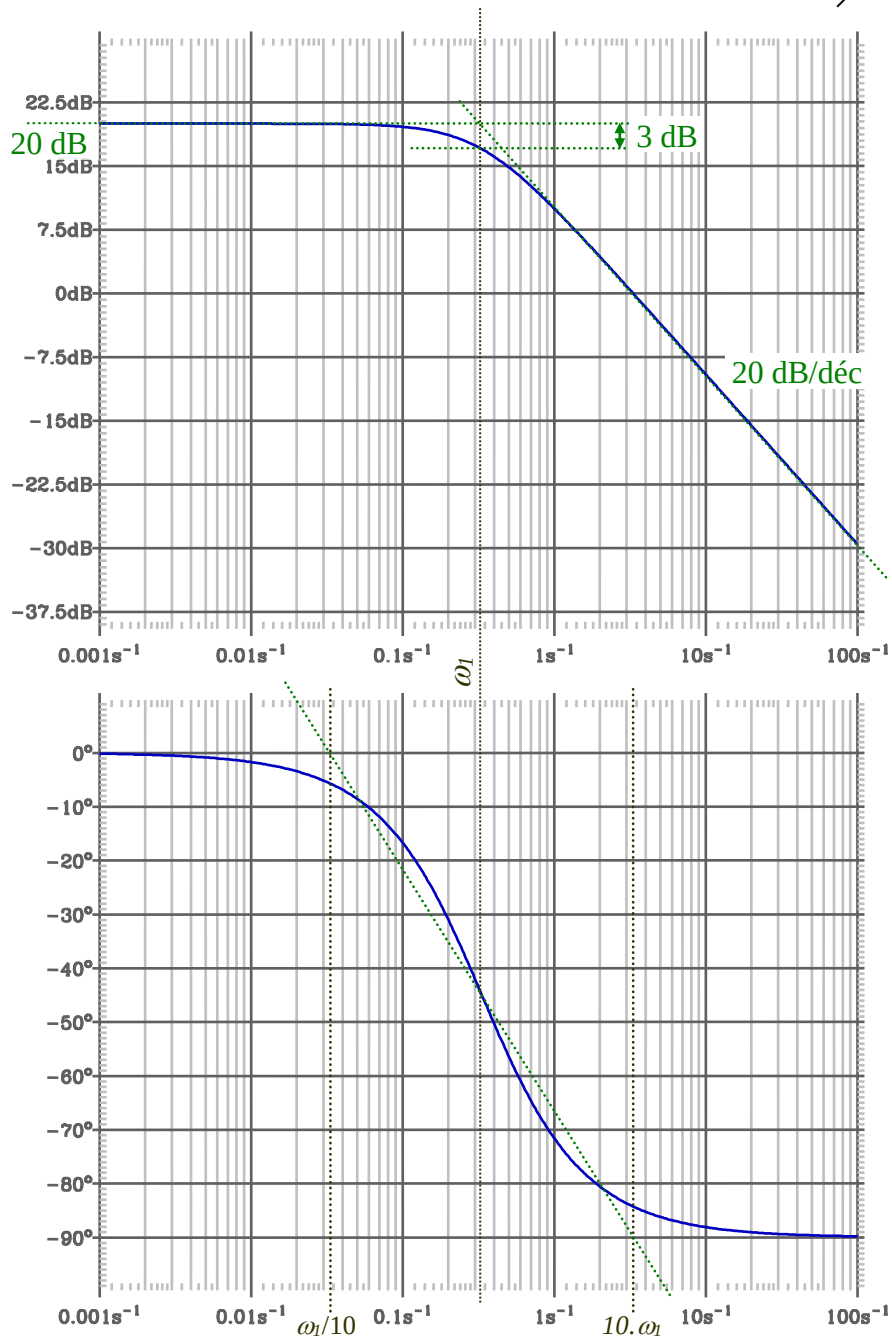
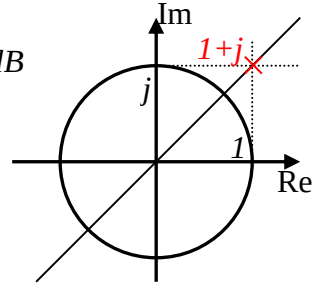
- quand  $\omega = \omega_1 : H_1(j\omega_1) \rightarrow \frac{10}{1+j}$

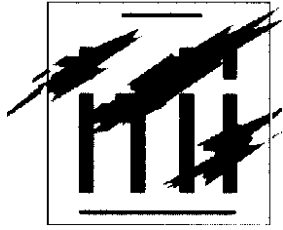
$$|H_1(j\omega_1)| = \frac{10}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow |H_1(j\omega_1)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(10) - 20 \cdot \log_{10}(\sqrt{2}) \approx 17dB$$

$\approx 3dB$

$$\arg(H_1(j\omega_1)) = \arg(10) - \arg(1+j) = -\frac{\pi}{4}$$

$\frac{\pi}{4}$





## ASSERVISSEMENT

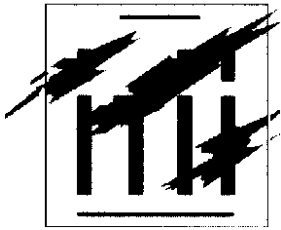
---

*Exemple 2 :*

$$H_2(s) = \frac{10 \cdot s}{1 + 5 \cdot s}$$

*Exemple 3 :*

$$H_3(s) = \frac{2 \cdot (s + 1)}{s \cdot (1 + 10 \cdot s)}$$



# ASSERVISSEMENT

## II.3. Fonctions particulières

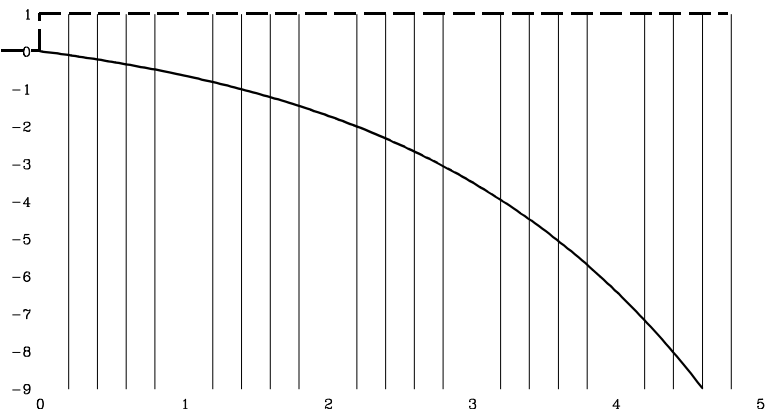
### II.3.a. Premier ordre

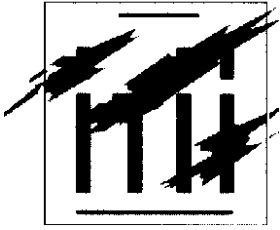
| (A=1)                                                                                          | Réponse temporelle      | Réponse fréquentielle |                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-----------------------|----------------|
|                                                                                                | u(t) : échelon unitaire | Amplitude (dB)        | Phase (degrés) |
| $H(s) = \frac{A}{1 + \tau s}$ $\tau = 1$                                                       |                         |                       |                |
| $H(s) = A \cdot \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$ $\tau_1 < \tau_2$ $\tau_1 = 1$ $\tau_2 = 2$ |                         |                       |                |
| $H(s) = A \cdot \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$ $\tau_1 > \tau_2$ $\tau_1 = 2$ $\tau_2 = 1$ |                         |                       |                |

si  $H(s) = \frac{A}{1 - \tau s}$  .  $\rightarrow$  pôle à partie réelle positive

$\rightarrow$  système **instable**.

Réponse indicielle :





## ASSERVISSEMENT

### II.3.b. Deuxième ordre

$$H(s) = \frac{A}{1 + 2m \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

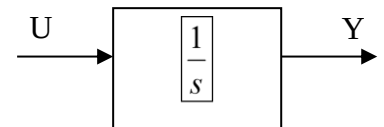
A : Gain statique

m : coefficient d'amortissement

$\omega_0$  : pulsation caractéristique

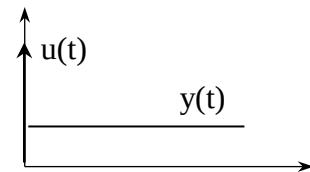
### II.3.c. Intégrateur

$$y = u \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s}$$



- réponse **impulsionnelle**

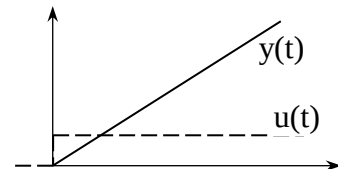
$$u(t) = A \cdot \delta(t) \Rightarrow y(t) = \int_0^t A \delta(\tau) d\tau = A$$



ceci traduit un changement de la valeur initiale de l'intégrateur.

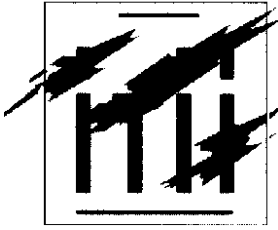
- réponse **indicielle**

$$u(t) = A \cdot \Gamma(t) \Rightarrow y(t) = A \cdot t$$



L'intégrateur seul est un système **instable** :

*entrée constante  $\Rightarrow$  sortie diverge*



## ASSERVISSEMENT

- réponse **harmonique**

$$H(s) = \frac{\omega_0}{s} \quad \text{ou} \quad H(\omega) \rightarrow \frac{\omega_0}{j\omega}$$

Gain :  $|H(\omega)|_{dB} \rightarrow 20 \cdot \log_{10}(\omega_0) - 20 \cdot \log_{10}(\omega)$

→ droite de pente -20dB/décade, passant par 0 dB en  $\omega = \omega_0$ .

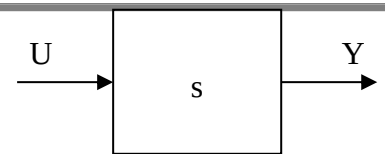
Phase :  $\text{Arg}(H(\omega)) = -\frac{\pi}{2}$

→ retard de phase constant.

*L'intégrateur atténue les fréquences élevées et renforce les fréquences basses*

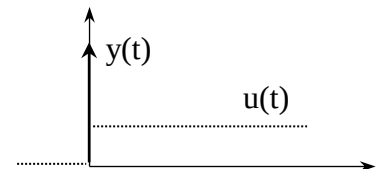
**Quand  $\omega=0$ , le gain est infini**

### II.3.d. Dérivateur



$$y = u \Rightarrow H(s) = s.$$

- réponse **indicielle** :  
→  $y(t)$  impulsion  $\Rightarrow$  Energie infinie  
→ *dérivateur parfait n'existe pas* (montages approchés)



- réponse **harmonique**

$$H(\omega) \rightarrow \frac{j \cdot \omega}{\omega_0}$$

Gain : → Droite de pente de +20dB/décade, passant par le point  $[\omega_0, 0]$ .

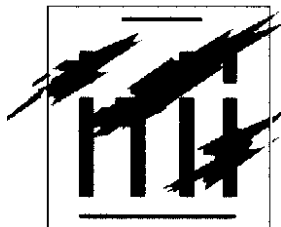
Phase : → Avance de phase de  $\frac{\pi}{2}$ .

*Le dérivateur amplifie les fréquences hautes  
 $\Rightarrow$  Augmente le bruit HF  $\rightarrow$  peut rendre  $y(t)$  inutilisable*

### II.3.e. Gain

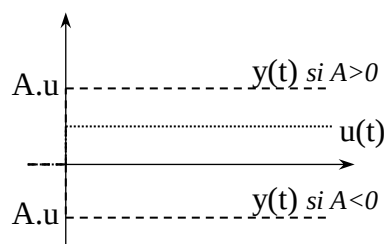
$$y = A \cdot u \Rightarrow H(s) = A.$$





# ASSERVISSEMENT

- Réponse **indicielle** :



- Réponse **harmonique** :

Gain :  $20 \cdot \log_{10}(|A|)$ .

Phase :  $0$  si  $A$  est positif  
 $\pi$  si  $A$  est négatif.

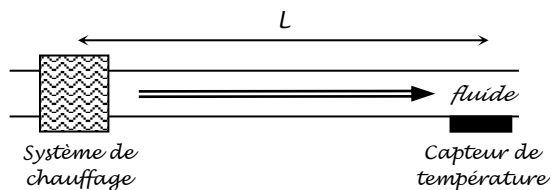
## II.3.f. Retard

Exemple :

$v$  : vitesse du fluide

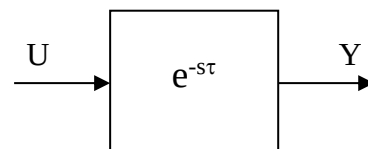
$L$  : longueur du conduit

$T$  : retard



$$T = \frac{L}{v}$$

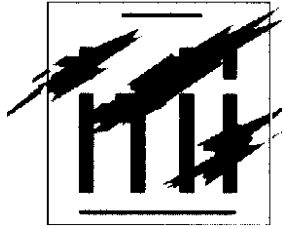
$$L(x(t - \tau)) = e^{-s\tau} \cdot X(s)$$



- Réponse **harmonique** :

Gain :  $|e^{-j\omega\tau}| = 1 \Rightarrow G = 0\text{dB}$ .

Phase :  $\arg(e^{-j\omega\tau}) = -\omega \cdot \tau$ .



## ASSERVISSEMENT

---

### - Approximations :

Forme simple :

$$e^{-s\tau} \approx 1 - s\tau + \frac{(s\tau)^2}{2!} - \frac{(s\tau)^3}{3!} +$$

$$\text{et } \frac{1}{1+s\tau} \approx 1 - s\tau + (s\tau)^2 - (s\tau)^3 +$$

$$\Rightarrow e^{-s\tau} \approx \frac{1}{1+s\tau}$$

Approximation de Padé :

$$e^{-s\tau} \approx \frac{1 - s\frac{\tau}{2}}{1 + s\frac{\tau}{2}} = 1 - s\tau + \frac{(s\tau)^2}{2} - \frac{(s\tau)^3}{4} + \quad \text{pour } \omega < \frac{2}{\tau}.$$

→ Module = 1

→ Phase =  $-2\arctg\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$  ( $\approx -\omega\tau$  quand  $\omega \rightarrow 0$ ).

Autre approximation :

$$e^{-s\tau} \approx \frac{1 - s\frac{\tau}{2} + \frac{(s\tau)^2}{12}}{1 + s\frac{\tau}{2} + \frac{(s\tau)^2}{12}}.$$

## III. Systèmes asservis

### III.1. Principe

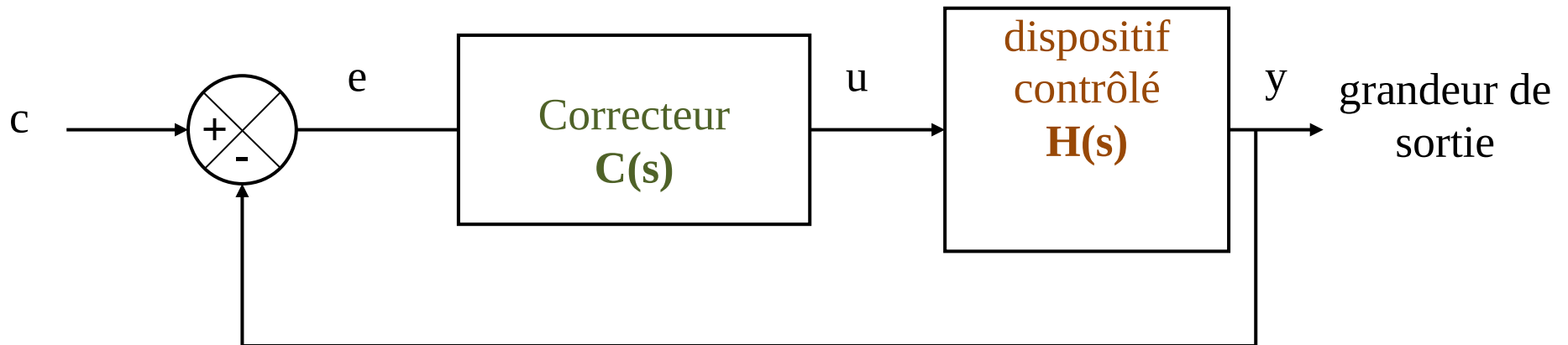
But : *grandeur de sortie* = « consigne »

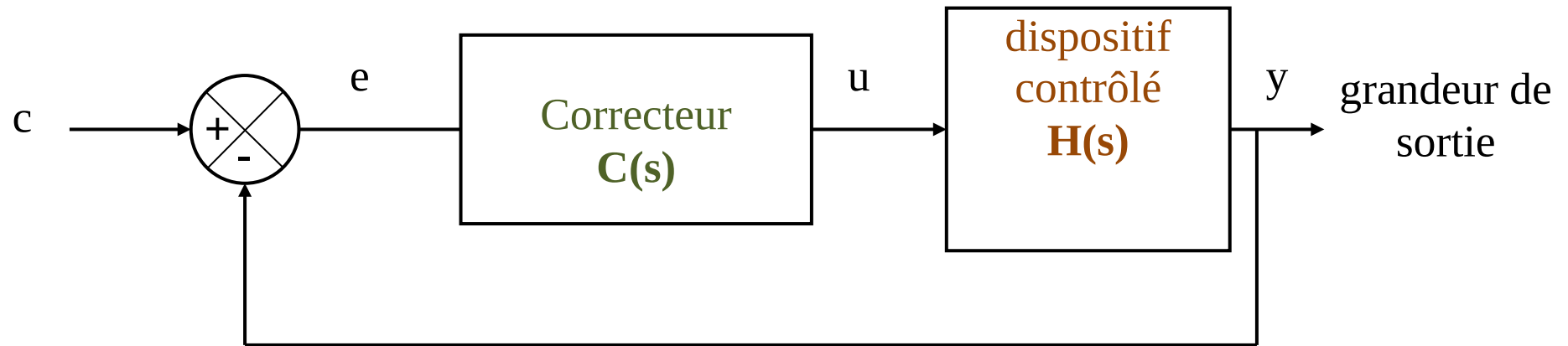
- Sortie identique à la consigne en régime permanent
- La sortie suit la consigne lors des transitoires
- Le système est insensible aux perturbations
- Pas de dégradation de la réponse « naturelle »

→ Nécessite connaissance d'un modèle du processus →  $H(s)$ .

→ Comparaison de la sortie du système (la grandeur à contrôler) avec la consigne.

→ Retour en opposition de phase





→ Correcteur chargé :

- d'adapter le signal de retour au pilotage du système.
- d'améliorer les performances (précision, dynamique)
- d'assurer la stabilité

Remarque :

- **Retour unitaire** → plus simple

### ***III.2. Stabilité d'un système asservi***

*Système bouclé → Risque d'instabilité*

### III.2.a. Observation des pôles

Système stable  $\rightarrow$  revient à un état stable après perturbation.

$H(s)$  fonction de transfert d'un système  $\rightarrow$  
$$H(s) = \sum \frac{A_i}{s - s_i}$$

où  $s_i$  sont les pôles du système.

Entrée impulsionnelle (Dirac)  $\Rightarrow$  
$$Y(s) = 1 \cdot \sum \frac{A_i}{s - s_i}$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum A_i \cdot e^{s_i t}$$

Chaque terme tend vers zéro si les pôles du système ( $s_i$ ) sont strictement **négatifs**

***$\rightarrow$  Système stable si tous les pôles sont à partie réelle négative***

### III.2.c. Stabilité, robustesse, marges de gain et de phase.

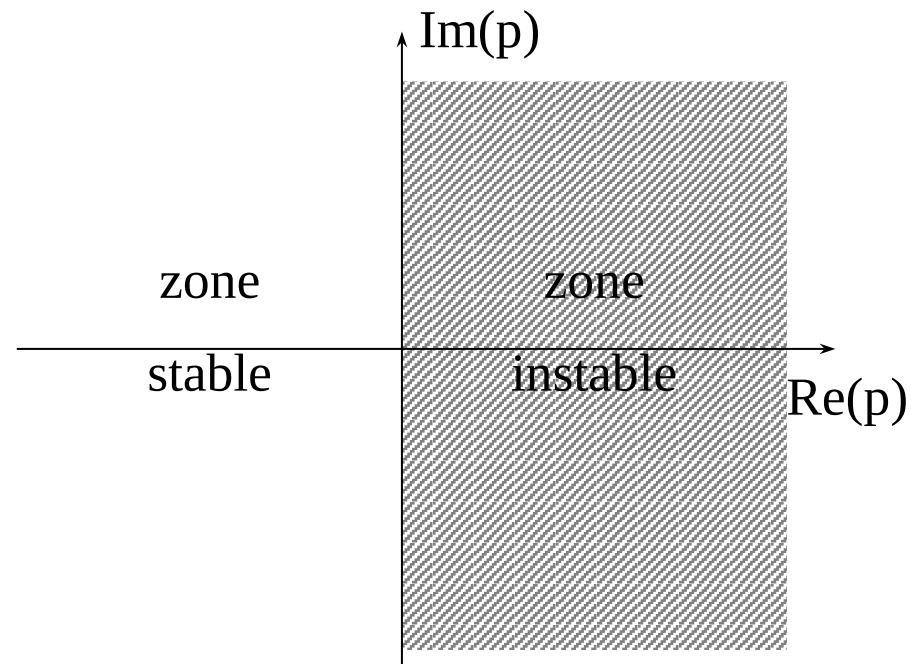
La **stabilité** est un critère **insuffisant** :

- modèle approché
- évolution des paramètres du modèle
- stabilisation lente si le système est à la limite de la stabilité

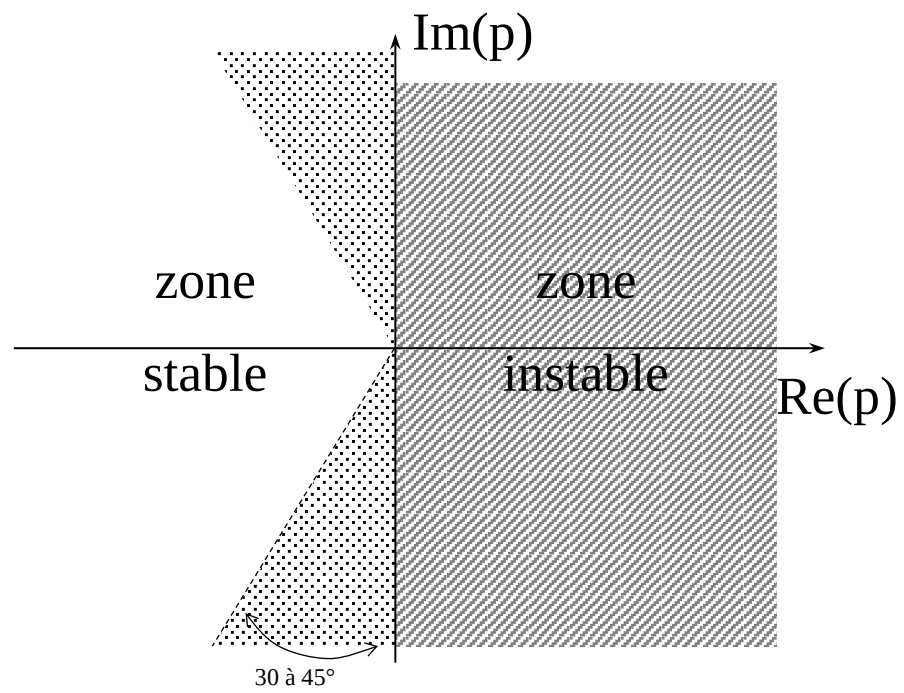


**Système robuste** : performances correctes malgré les *erreurs* de modélisation

*Localisation des pôles dans le plan complexe :*



Avec marges de sécurité :



## Observation de la stabilité à partir de l'étude fréquentielle :

### Etude intuitive :

Système microphone + amplificateur + HP

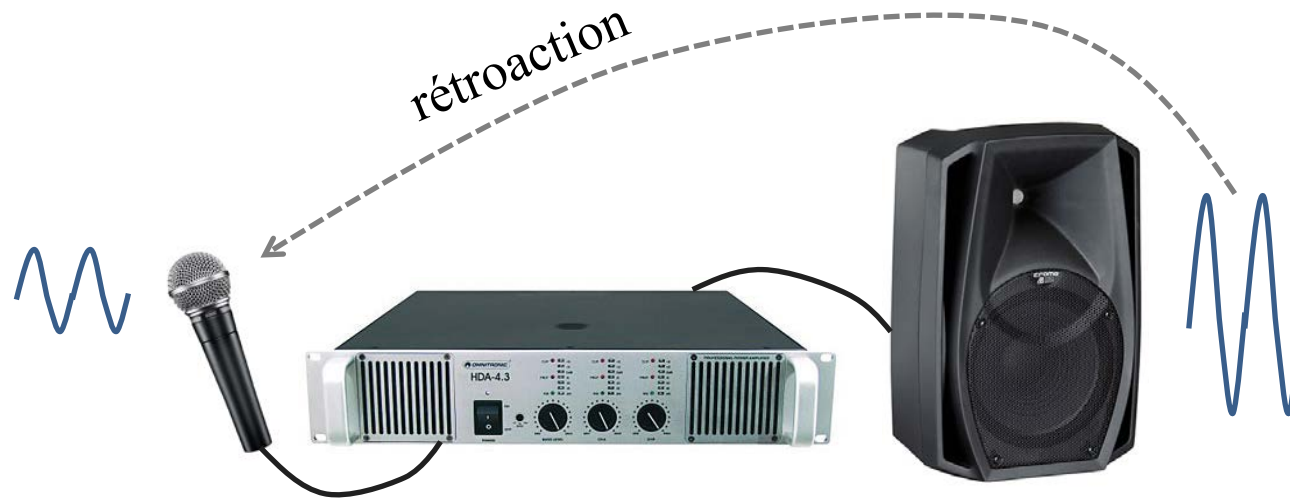
### Amplification :



→ risque de *Larsen*

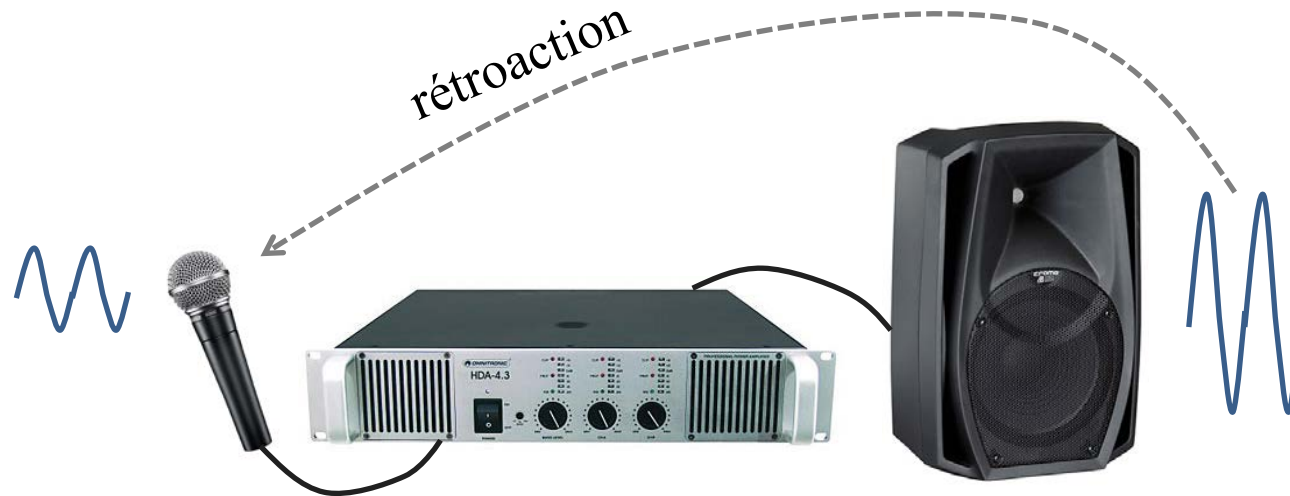
## Analyse du Larsen :

On applique un signal sinusoïdal sur le microphone :



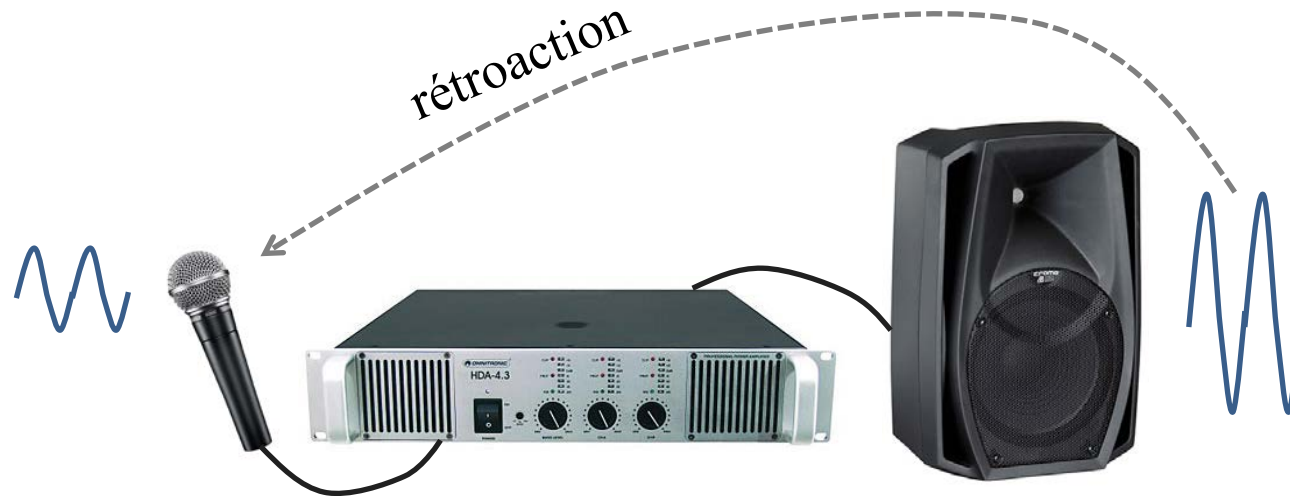
### Hypothèse 1 :

- Si le signal revient au niveau du micro avec une **phase opposée** et une **amplitude identique**  
⇒ annulation du son émis !



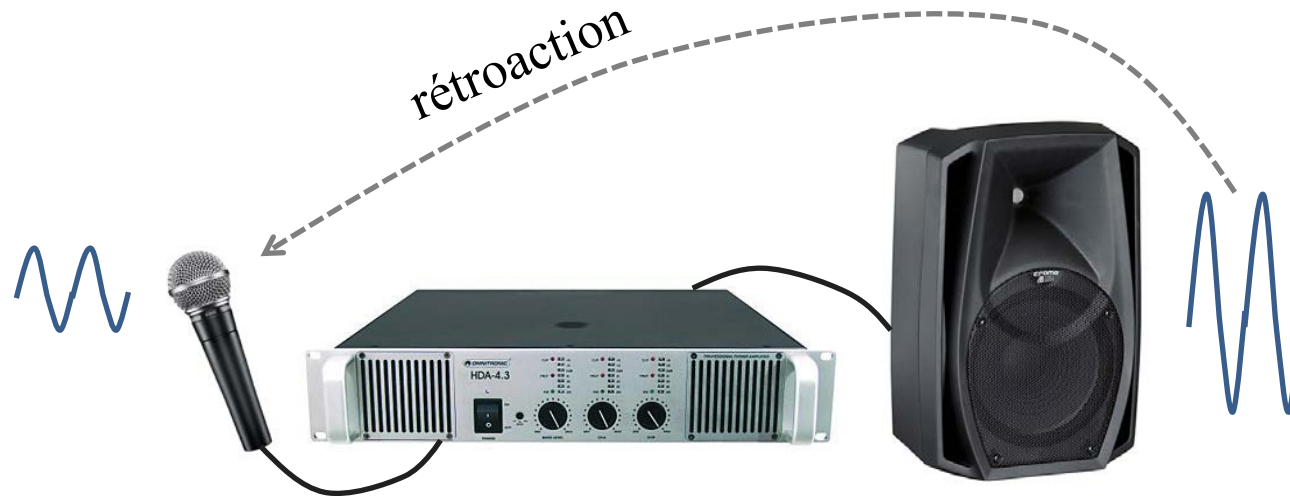
## Hypothèse 2 :

- Si le signal revient au niveau du micro avec une **phase identique** et une **amplitude plus petite** que celle d'origine :  
à chaque passage dans la boucle le son « de retour » est atténué  
⇒ le son de retour s'élimine naturellement



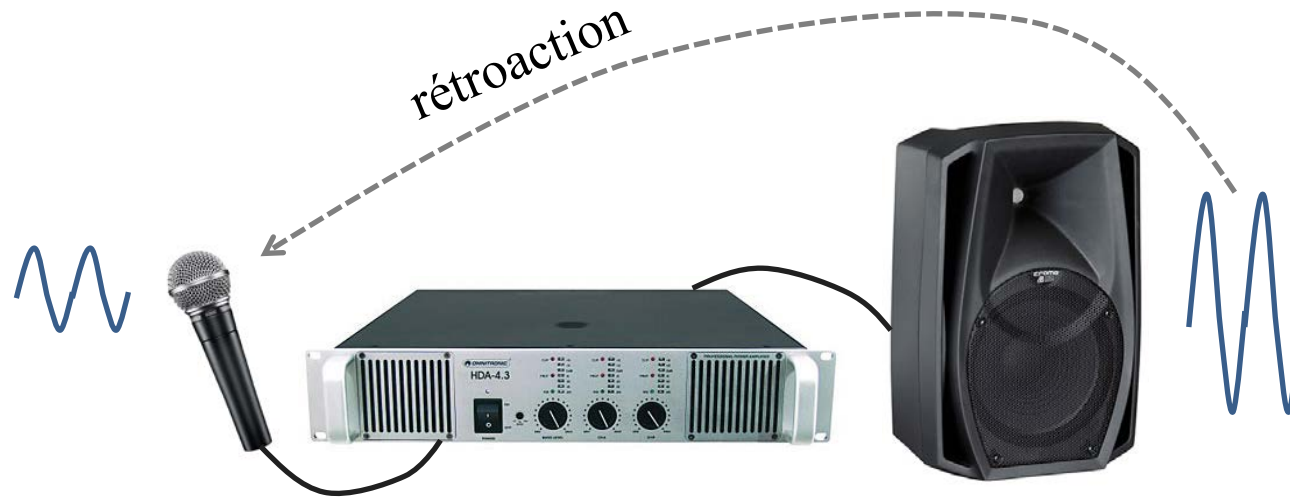
### Hypothèse 3 :

- Si le signal revient au niveau du micro avec une **phase identique** et une **amplitude supérieure** à celle d'origine :  
à chaque passage dans la boucle le son « de retour » est amplifié  
⇒ le son de retour s'accroît infiniment  
→ Saturation de l'amplificateur (et stabilisation)



### Hypothèse 4 :

- Si le signal revient au niveau du micro avec une **phase identique** et une **amplitude égale** à celle d'origine :  
à chaque passage dans la boucle le son est retransmis  
⇒ le son de retour persiste même en l'absence de signal d'origine  
→ Oscillateur



### Hypothèse 5 :

- Si le signal revient au niveau du micro avec une **phase différente** à celle d'origine :  
⇒ l'effet de rétroaction sera réduit



## Conclusion :

Il existe une seule fréquence pour laquelle le fonctionnement en oscillateur est possible :

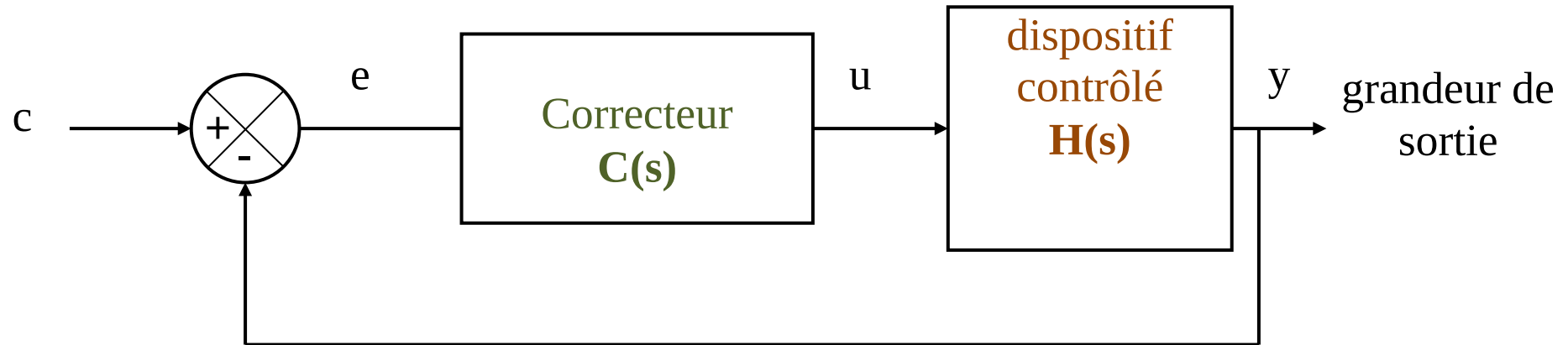
Quand le **retour en phase** est obtenu avec un **gain** global de boucle = **1**

Dépend :

- du niveau d'amplification
- de la géométrie du local (chemin de réflexion des ondes sonores)

Quand le **retour en phase** du signal se produit avec un **gain** > **1** : instabilité

## Transposition sur un système bouclé :



La sortie du système est ramenée vers l'entrée avec un « - »

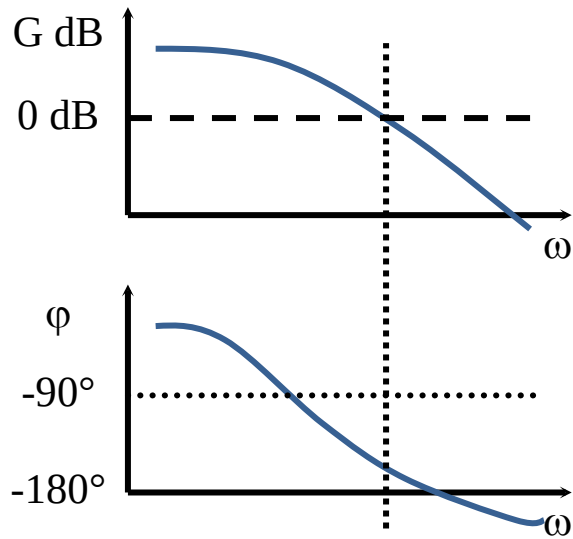
→ Retour en opposition de phase

⇒ Déphasage de  $180^\circ$

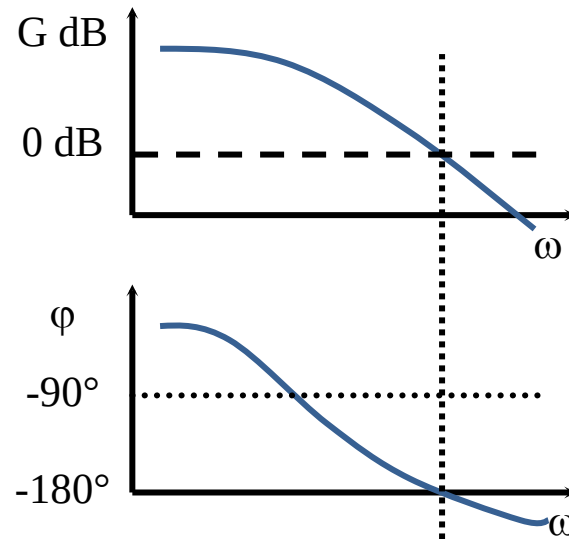
La condition de **retour en phase** sera donc obtenue quand l'ensemble  **$H.C$**  déphase de  **$-180^\circ$** .

## Etude sur les diagrammes de Bode :

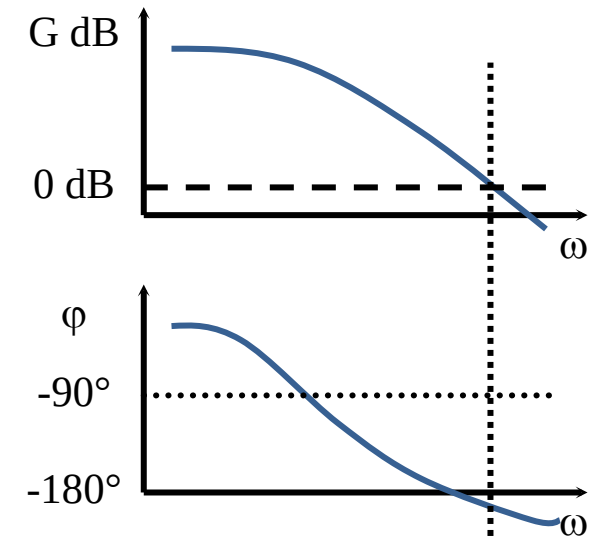
Stabilité si lorsque le module atteint 0dB  $\rightarrow$  déphasage supérieur à  $-180^\circ$  :



Système stable



Système juste oscillant



Système instable

Pour bonne robustesse, → une **marge de gain** et une **marge de phase** :

- marge de gain :

$m_g$  est l'écart entre le gain 0dB et celui obtenu pour la phase de  $-180^\circ$ .

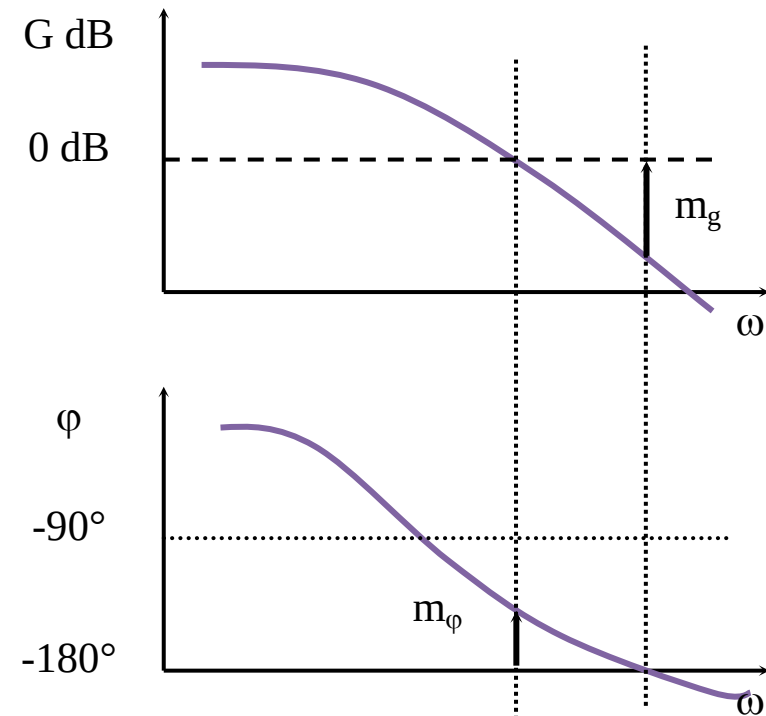
- marge de phase :

$m_\varphi$  est l'écart entre la phase  $-180^\circ$  et celle obtenue pour le gain de 0dB.

De manière classique :

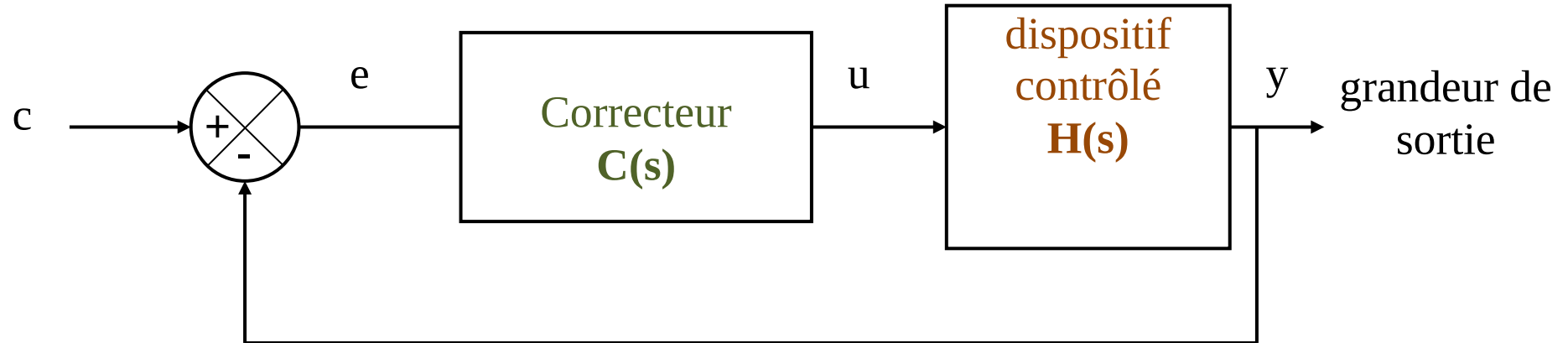
$m_\varphi$  de  $45^\circ$  à  $60^\circ$

$m_g$  de 10 à 15 dB



### III.3. Fonction de transfert d'un système asservi. Diagramme de Black.

#### III.3.a. Diagramme de Black



$$y = H \cdot u$$

$$u = C \cdot e$$

$$e = c - y$$

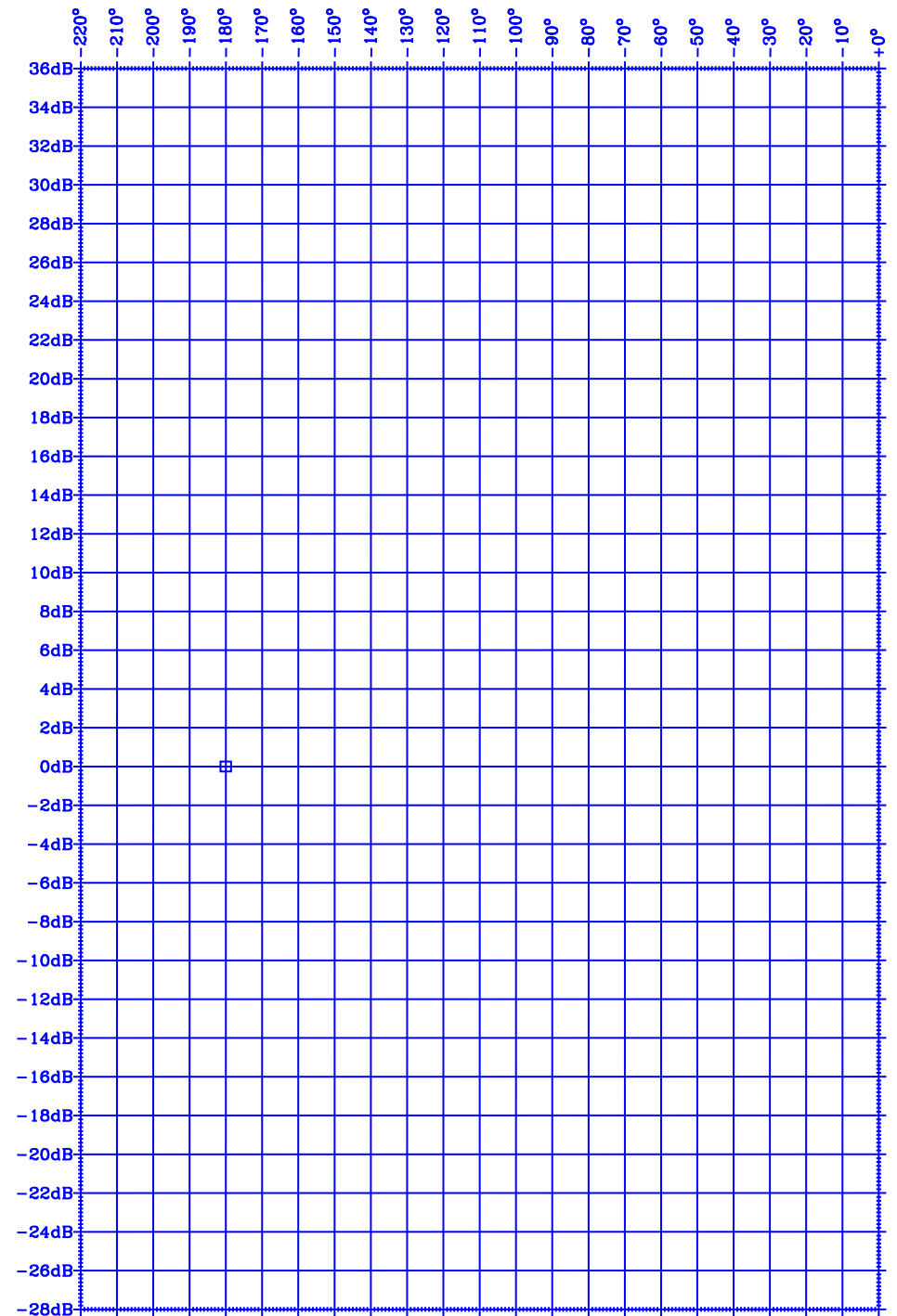
$$\Rightarrow \frac{y}{c} = \frac{H(s) \cdot C(s)}{1 + H(s) \cdot C(s)}$$

Performances obtenues dépendent des pôles de  $(y/c)$

# Abaque de Black

Abscisses : Phase de la fonction de transfert  
en **boucle ouverte**

Ordonnées : Module (en dB) de la fonction  
de transfert en **boucle ouverte**



## Diagramme de Nichols

*L'abaque de Black-Nichols permet de déterminer la valeur de la fonction de transfert en boucle fermée à partir du tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte (HC).*

$$\frac{y}{c} = \frac{H(s) \cdot C(s)}{1 + H(s) \cdot C(s)}$$

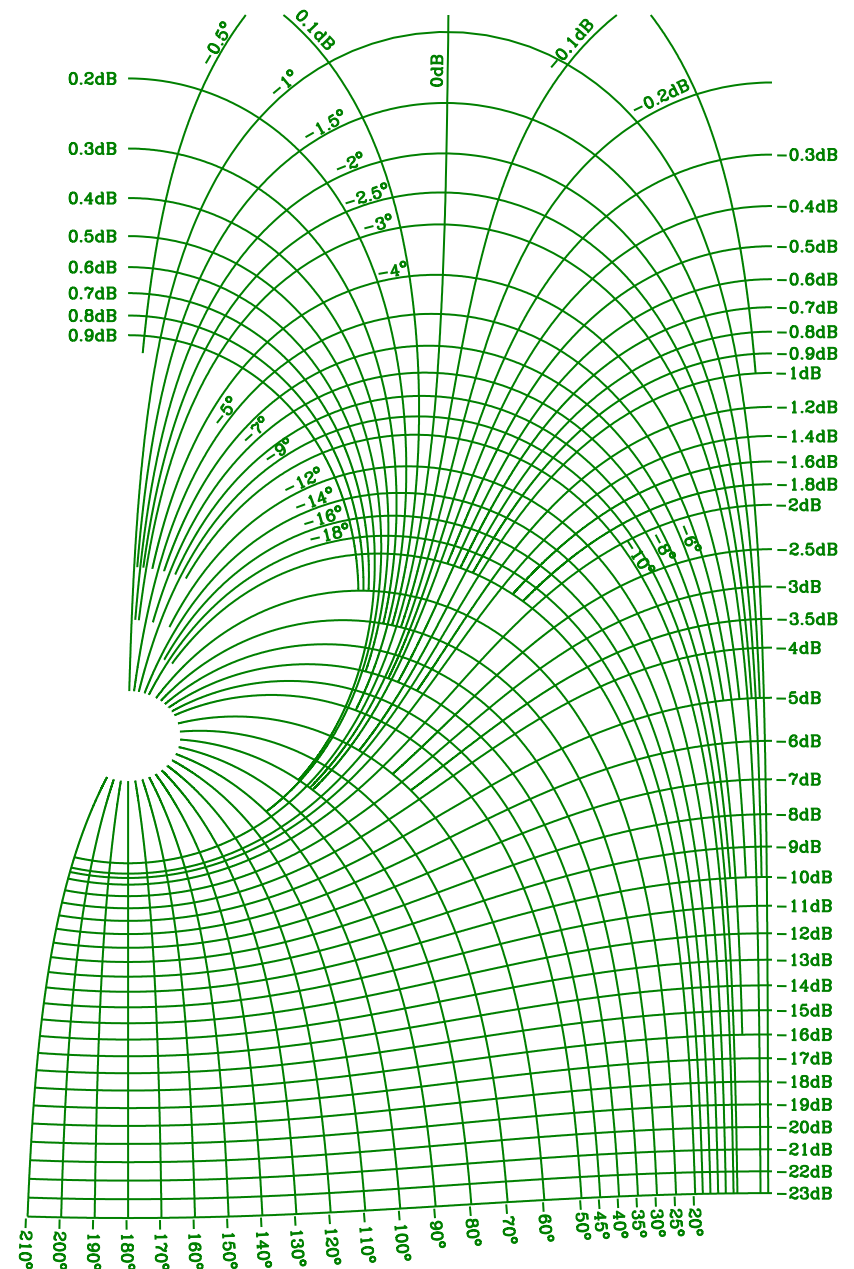
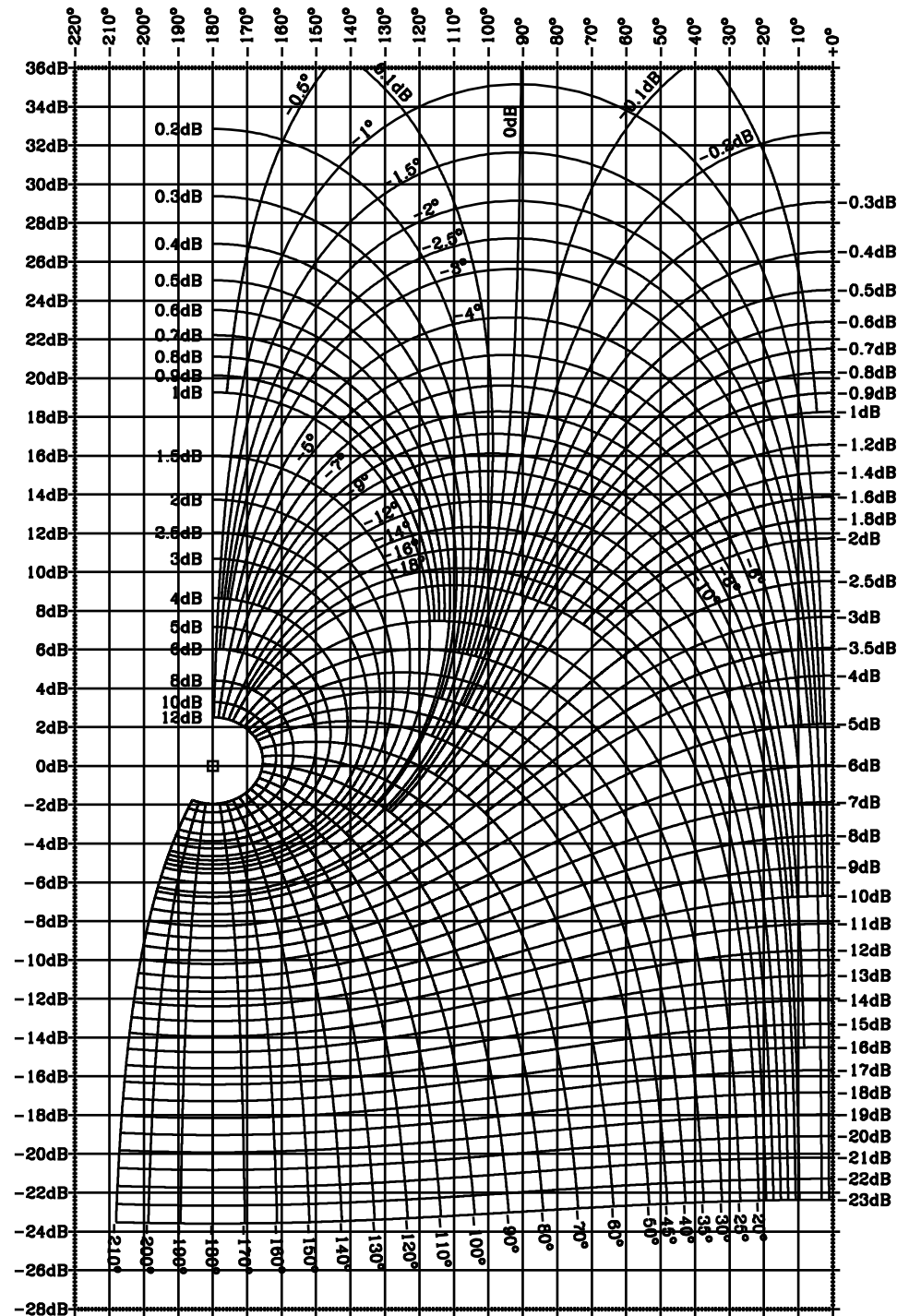


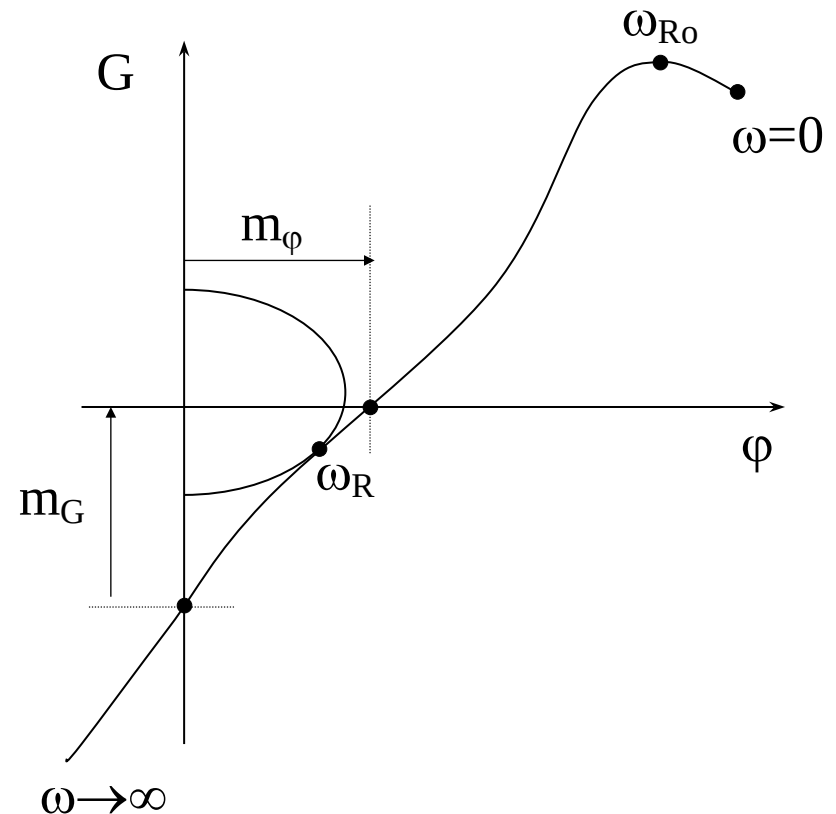
Diagramme de Black-Nichols





### III.3.b. Caractéristiques obtenues sur le diagramme de Black

- marge de gain ( $m_G$ )
- marge de phase ( $m_\phi$ )
- valeurs des gains et phases pour  $\omega=0$  et  $\omega \rightarrow \infty$ , en boucle ouverte et en boucle fermée.
- pulsation de résonance  $\omega_{R0}$  en boucle ouverte
- pulsation de résonance  $\omega_R$  en boucle fermée



Remarque :

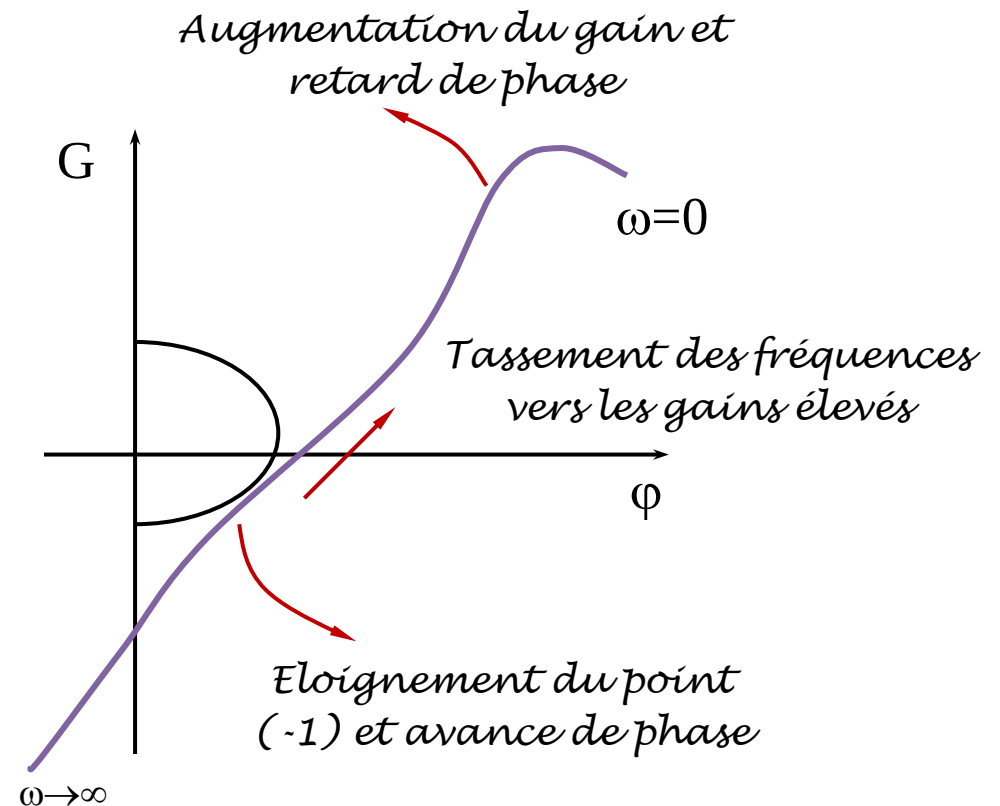
marges de gain et de phase positives  $\Rightarrow$  stabilité du système en boucle fermée

### III.4. Correcteurs

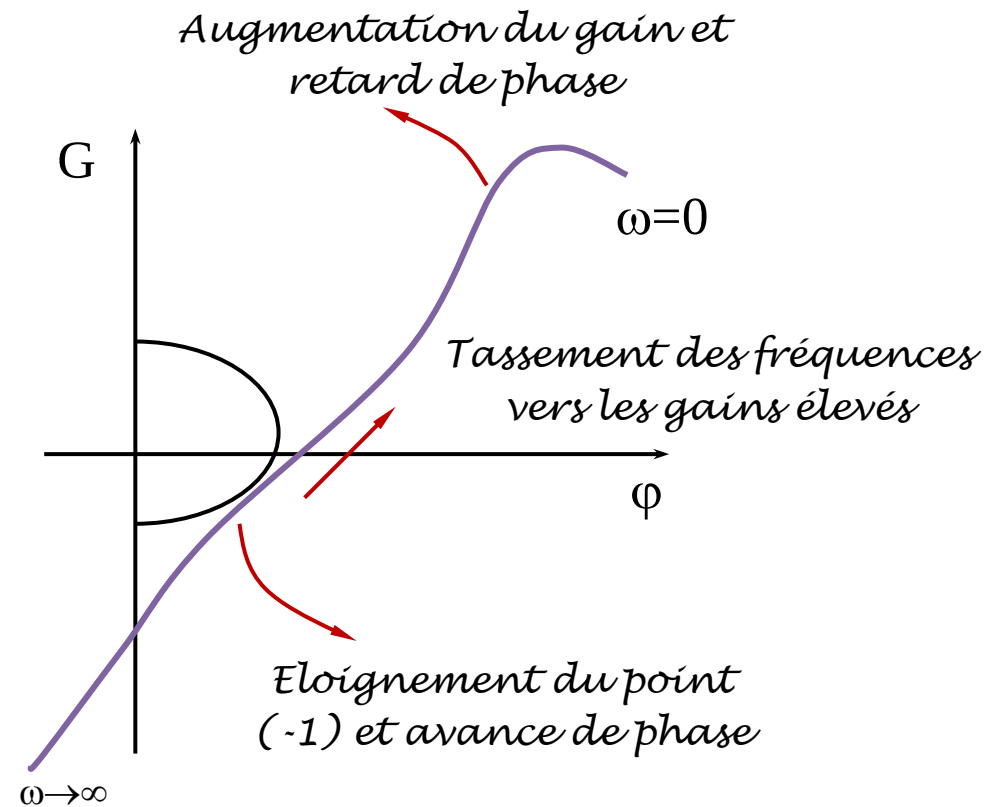
#### III.4.1. Objectifs

##### Rôle :

- stabiliser ou améliorer la stabilité du système
  - éloigner la courbe HC(s) dans le lieu de Black du point (-1)
  - [0dB, -180°]
  - augmenter les marges de gain et marges de phase
  - avance de phase en fréquences élevées
  - retard de phase en fréquences basses.
- diminuer l'erreur statique



- augmenter le gain de  $HC(s)$  pour les fréquences basses
- erreur statique annulée si le gain est infini pour  $\omega=0$  (intégrateur dans la boucle)
- diminuer le temps de réponse.
  - augmentation de la bande passante du système
  - tassement des fréquences vers les gains élevés.



### III.4.b. Correcteur Proportionnel

$$C(s) = k$$

Si  $k$  est supérieure à 1 :

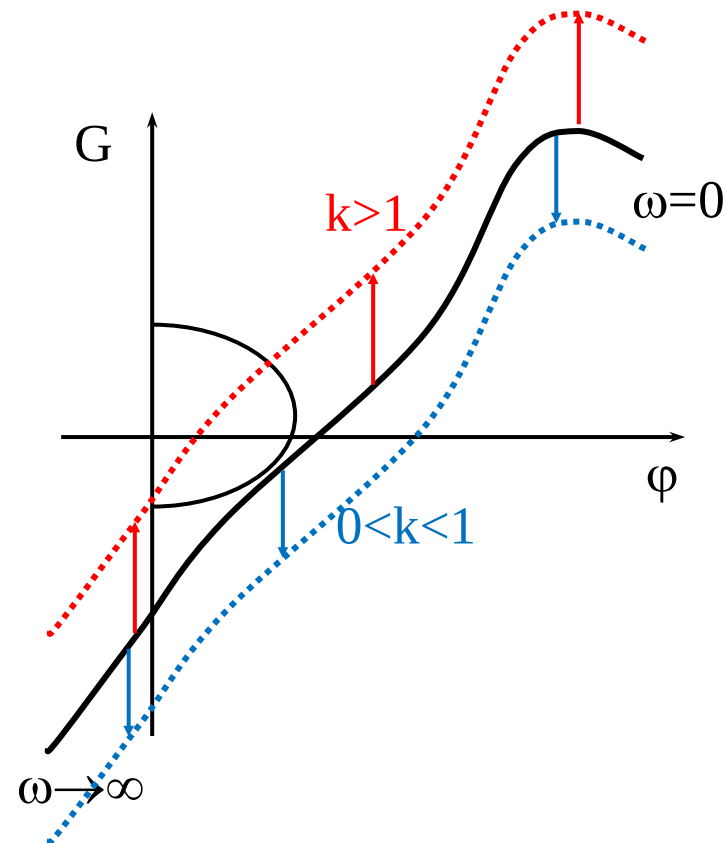
- l'erreur diminue
- la stabilité diminue

$$\frac{y}{c} = \frac{H(s) \cdot C(s)}{1 + H(s) \cdot C(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{c} = \frac{H(s) \cdot k}{1 + H(s) \cdot k}$$

si  $k$  augmente  $\rightarrow \frac{y}{c}$  tend vers 1

$$\Rightarrow y \approx c$$



---

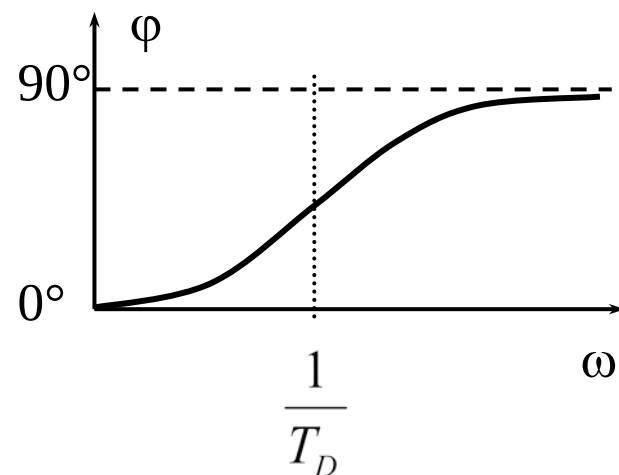
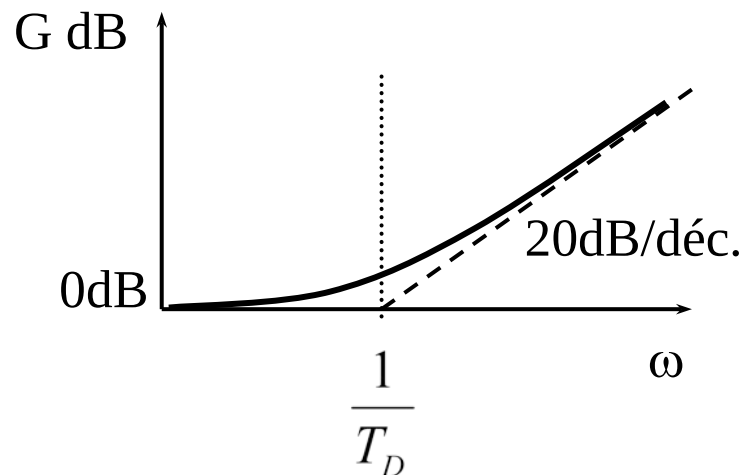
### III.4.c. Correcteur Proportionnel – Dérivé

Correcteur proportionnel → risque d'instabilité.

Pour améliorer la stabilité → avancer la phase au voisinage du point (-1).

→ Correcteur proportionnel dérivé :

$$C(s) = k \cdot (1 + T_D s) .$$



(k=1)

## (Correcteur proportionnel dérivé)

→ Avance de phase pour les fréquences élevées

( $\omega > \omega_R$ )

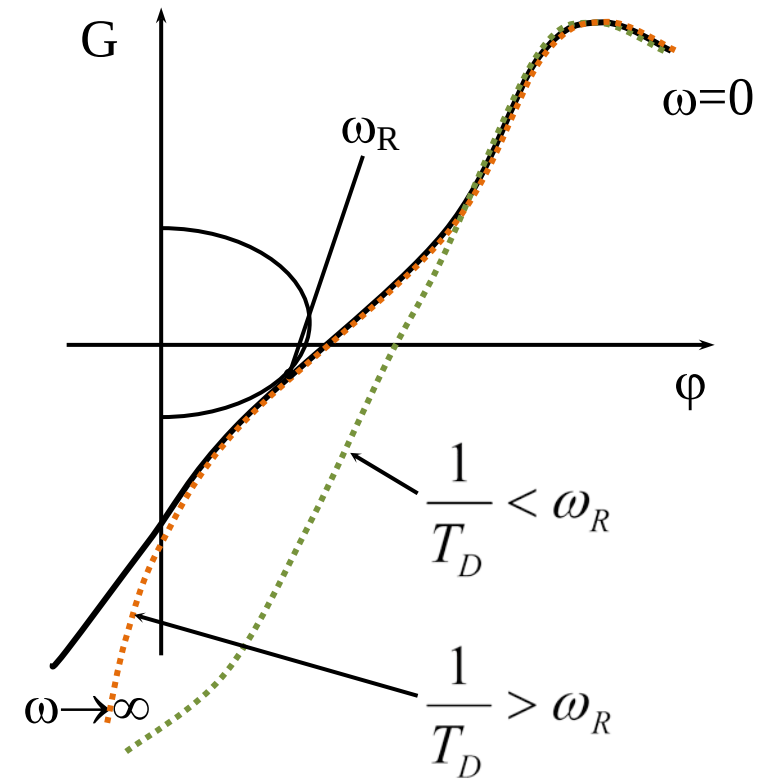
→ Accroissement du gain

Il faut :  $\frac{1}{T_D} < \omega_R$

Augmentation des marges de gain et de phase

⇒ action proportionnelle possible avec maintien de la stabilité

→ réduction de l'erreur statique.



Bande passante du système augmentée ⇒ amélioration de la dynamique du système.

En pratique, correcteur dérivé irréalisable

→ On prend :  $C(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$  , avec  $a > 1$ .

→ avance de phase dans une plage de fréquences autour de  $\omega_R$ .

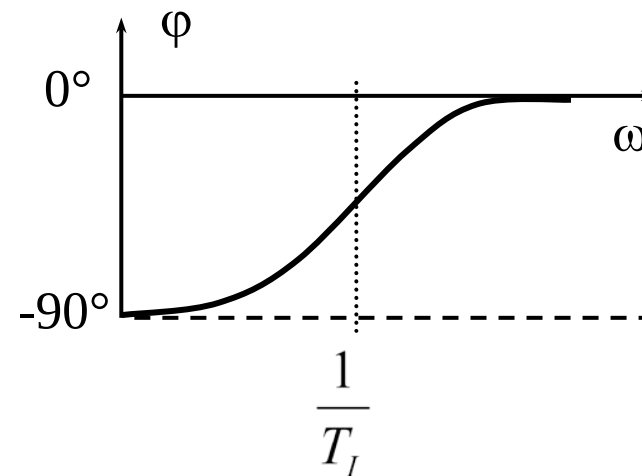
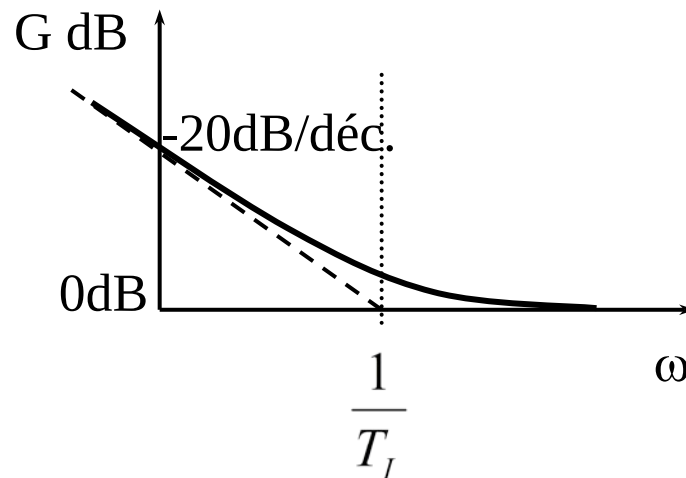
---

### III.4.d. Correcteur Proportionnel – Intégral

Pour annuler l'erreur statique → gain infini à la fréquence nulle.

→ action intégrale.

$$C(s) = k \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = k \cdot \frac{1 + T_I s}{T_I s}$$



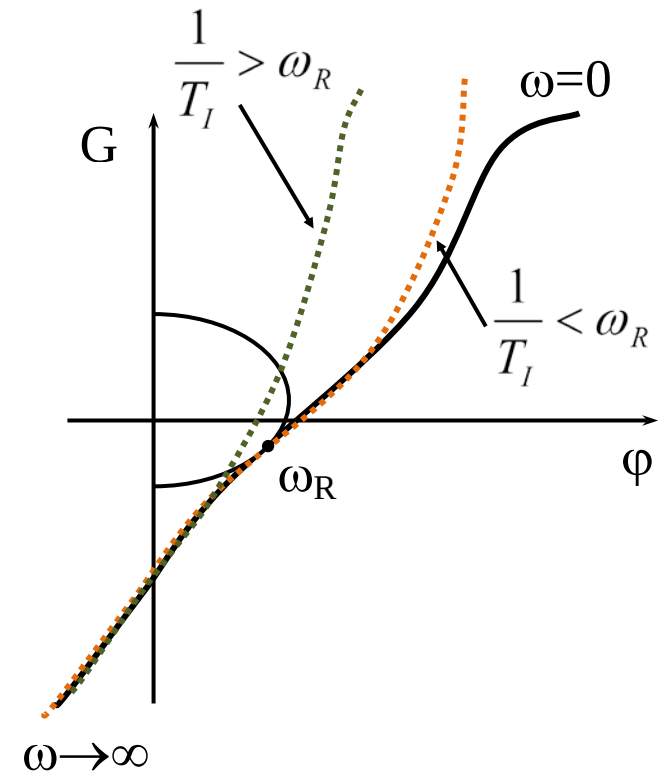
( $k=1$  pour action intégrale seule)

→ Effet que dans les basses fréquences

→ Gain important en retardant la phase



Il faut  $\frac{1}{T_I} < \omega_R$  pour rester stable



### III.4.e. Correcteur PID

→ Combine les correcteurs précédents :

- action **proportionnelle** : réduction de l'erreur statique, réglage des marges de gain et de phase
- action **dérivée** : stabilisation du système, amélioration des performances dynamiques
- action **intégrale** : annulation de l'erreur statique

$$C(s) = k \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

$$\frac{1}{T_I} < \omega_R \quad \text{et} \quad \frac{1}{T_D} < \omega_R$$

### III.4.f. Réglage expérimental d'un correcteur PID

Réglage des trois paramètres :

- le gain proportionnel ( $k$ )
- l'action dérivée ( $T_D$ )
- l'action intégrale ( $T_I$ )

Système soumis à une perturbation

→ on observe l'évolution de la grandeur de sortie

### **3 étapes :**

1. réglage de l'action proportionnelle : le système doit être en début de régime oscillant lorsque la perturbation est appliquée, sans présenter cependant des dépassements excessifs.
2. réglage de l'action intégrale : le système doit revenir suffisamment rapidement à la valeur finale sans présenter d'oscillations trop importantes.
3. réglage de l'action dérivée : le système ne doit pas présenter d'oscillations importantes.