CORRIGÉ

nom :M. Deloizy

ITII mécanique
Module U3
1ère année

ASSERVISSEMENT

contrôle continu

UFR SCIENCES
Janvier 2002

Durée : 1h45mn – Polycopié de cours autorisé.
Porter les réponses directement sur cet énoncé, dans les cadres prévus à cet effet. Tout autre document sera ignoré.
Les 3 parties sont totalement indépendantes. Les barèmes sont notés entre crochets. Ils sont donnés à titre indicatif.

Soit la fonction de transfert H(s) suivante.

$$H(s) = \frac{250 \cdot (s+2)}{(s+50)}$$

Cette fonction de transfert est celle d'un système dont le signal d'entrée est u(t) et le signal de sortie est y(t).

$$u(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t)$$

I. On prend u(t)=G(t) (échelon unitaire).

I.1. Donner l'expression de U(s). *[0.5]*

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

I.2. En déduire l'expression de Y(s). *[0.5]*

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) = \frac{250 \cdot (s+2)}{s \cdot (s+50)}$$

I.3. Calculer la valeur de y(t) quand t → 0+. *[1]*

On utilise le théorème de la valeur initiale :

$$y(t \to 0^+) = \lim_{s \to \infty} s \cdot Y(s) = s \cdot \left. \frac{250 \cdot (s+2)}{s \cdot (s+50)} \right|_{s \to \infty} = 250$$

I.4. Calculer la valeur de y(t) quand t → ∞. *[1]*

On utilise le théorème de la valeur finale :

$$y(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = s \cdot \left. \frac{250 \cdot (s+2)}{s \cdot (s+50)} \right|_{s \to 0} = 10$$

I.5. Déterminer l'expression de y(t). *[2]*

$$Y(s)=\frac{250\cdot(s+2)}{s\cdot(s+50)}$$

La décomposition en éléments simples donne :

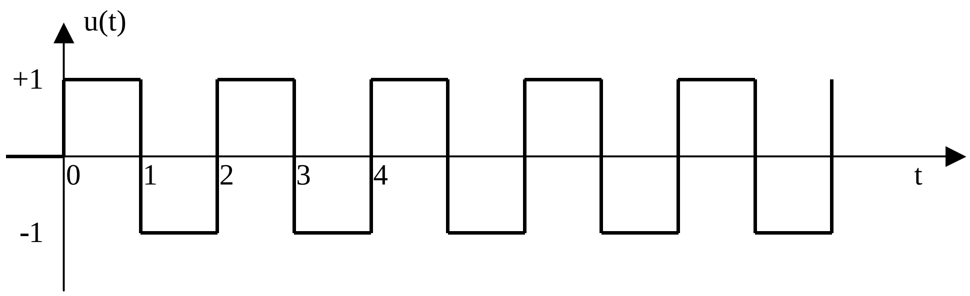
$$Y(s)=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+50}=\frac{as+50a+bs}{s\cdot(s+50))}$$

Par identification, on trouve :

$$\begin{cases}a+b=250\\ 50a=500\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=10\\ b=240\end{cases}$$

d'où : $y(t)=10\cdot\Gamma(t)+240\cdot e^{-\frac{t}{50}}\cdot\Gamma(t)$

II. On prend maintenant le signal u(t) représenté ci-dessous :



Déterminer l'expression de U(s). *[3]*

On peut écrire u(t) sous la forme :

$$u(t)=\Gamma(t)-2\Gamma(t-1)+2\Gamma(t-2)-2\Gamma(t-3)+2\Gamma(t-4)-\dots$$

$$U(s)=\frac{1}{s}-2\frac{e^{-s}}{s}+2\frac{e^{-2s}}{s}-2\frac{e^{-3s}}{s}+2\frac{e^{-4s}}{s}-\cdots$$

On peut alors écrire U(s) sous la forme :

$U(s)=\frac{1}{s}\cdot(1-2\cdot S_n)$ avec $S_n=q-q^2+q^3-q^4+q^5-\cdots+(-1)^{n+1}q^n$ et $q=e^{-s}$

On a donc : $S_n=q-q^2+q^3-q^4+q^5-\cdots+(-1)^{n+1}q^n$

Et $q\cdot S_n=q^2-q^3+q^4-q^5+\cdots-(-1)^{n+1}q^n+(-1)^{n+2}q^{n+1}$

$$\Rightarrow S_n\cdot(1+q)=q+(-1)^n q^{n+1}\quad\Rightarrow\quad S_n=\frac{q+(-1)^n q^{n+1}}{1+q}$$

Soit, quand n $\to\infty$: $S_n=\frac{q}{1+q}=\frac{e^{-s}}{1+e^{-s}}$

Et finalement : $U(s)=\frac{1}{s}\cdot\left(1-2\frac{e^{-s}}{1+e^{-s}}\right)$

Que l'on peut écrire également, en multipliant au numérateur et au dénominateur par $(1-e^{-s})$:

$$U(s)=\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{1-2\cdot e^{-s}+e^{-2s}}{1-e^{-2s}}\right)$$

III. Etude de H(s) en régime harmonique.

III.1. Ecrire H(s) sous la forme d'un produit de 3 termes comme indiqué ci-dessous :

$H(s) = A \cdot H_1(s) \cdot H_2(s)$, où A est une constante.

Expliciter les expressions de A, H_1(s) et H_2(s). *[1]*

$$H(s) = 10 \frac{1+\frac{s}{2}}{1+\frac{s}{50}}$$

A = 10

H_1(s) = $1+\frac{s}{2}$

H_2(s) = $\frac{1}{1+\frac{s}{50}}$

III.2. Donner la valeur de A en dB et de la phase de A. *[1]*

A_{dB} = 20 dB arg(A) = 0 rad.

III.3.Etude de H_1.

[1]

III.3.a. Que vaut H_1 quand $\omega \to 0$? $\left.H_1\right|_{w\to 0} \to 1$

En déduire la valeur de $\left|H_1\right|_{dB}$ et de arg(H_1) dans cette zone.

$\left|H_1\right|_{dB} \to 0 dB$ $\arg(H_1) \to 0 rad.$

[1]

III.3.b. Que vaut H_1 quand $\omega \to \infty$? $\left.H_1\right|_{w\to \infty} \to \frac{jw}{2}$

En déduire la valeur de $\left|H_1\right|_{dB}$ et de arg(H_1) dans cette zone.

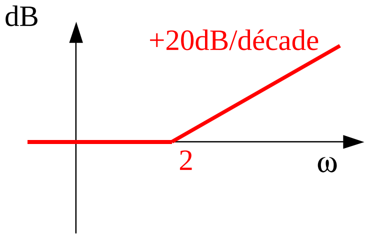
$\left|H_1\right|_{dB} \to 20 \cdot \log(w) - 20 \cdot \log(2)$ ➔ droite de pente +20 dB/décade passant par [2rad/s,0dB]

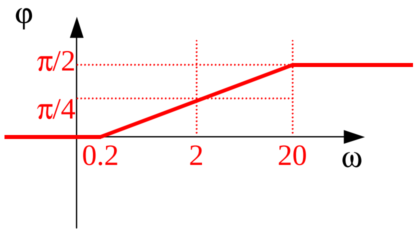
$\arg(H_1) \to \frac{p}{2}$

III.3.c. Etablir la valeur du gain et de la phase de H_1 pour ω_1, une valeur particulière de ω que l'on choisira avec soin. *[1]*

ω_1 = 2 rad/s $\left|H_1\right|_{dB} = 3$ dB arg(H_1) = $\pi/4$

III.3.d. Tracer brièvement l'allure des diagrammes de Bode correspondant à H_1. *[1]*





III.4.Etude de H_2.

[1]

III.4.a. Que vaut H_2 quand $\omega \to 0$? $\left.H_2\right|_{w\to 0} \to 1$

En déduire la valeur de $\left|H_2\right|_{dB}$ et de $\arg(H_2)$ dans cette zone.

$\left|H_2\right|_{dB} \to 0dB$ $\arg(H_2) \to 0rad.$

[1]

III.4.b. Que vaut H_2 quand $\omega \to \infty$? $\left.H_2\right|_{w\to\infty} \to \frac{50}{jw}$

En déduire la valeur de $\left|H_2\right|_{dB}$ et de $\arg(H_2)$ dans cette zone.

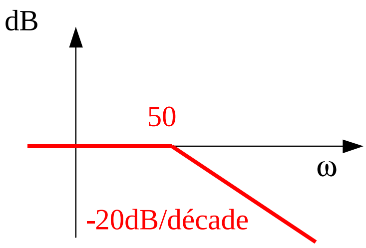
$\left|H_2\right|_{dB} \to 20\cdot\log(50) - 20\cdot\log(w)$ ➔ droite de pente -20 dB/décade passant par [50rad/s,0dB]

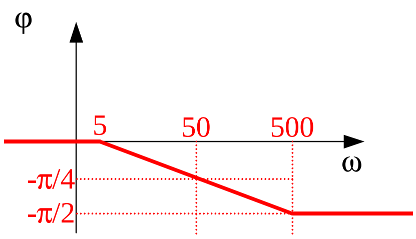
$\arg(H_2) \to -\frac{p}{2}$

III.4.c. Etablir la valeur du gain et de la phase de H_2 pour ω_2, une valeur particulière de ω que l'on choisira avec soin. *[1]*

ω_2 = 50 rad/s $\left|H_2\right|_{dB}$ = -3 dB $\arg(H_2)$ = -π/4

III.4.d. Tracer brièvement l'allure des diagrammes de Bode correspondant à H_2. *[1]*

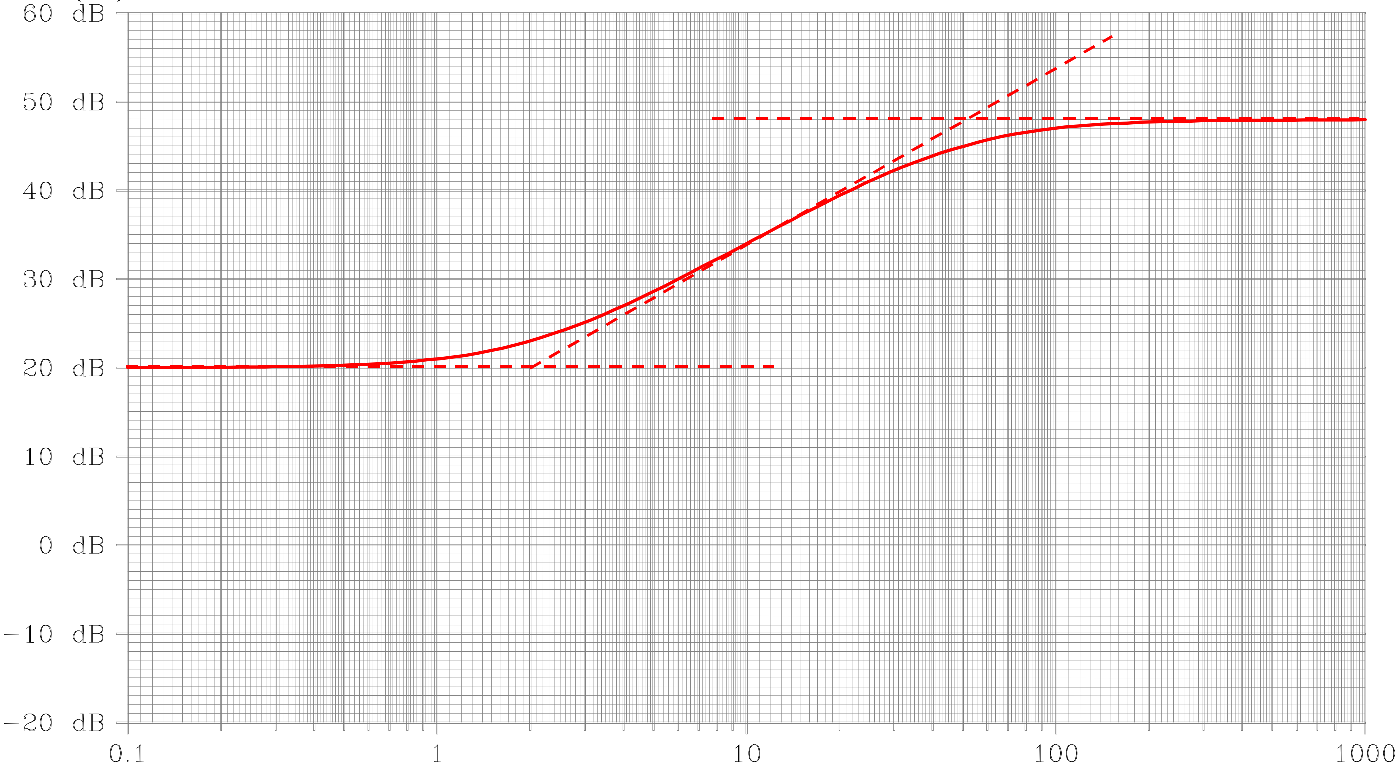




III.5. <u>Tracé des diagrammes de Bode</u>. *[2]*

Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques (gain et phase) correspondant à H.

Gain (dB) :



Phase :