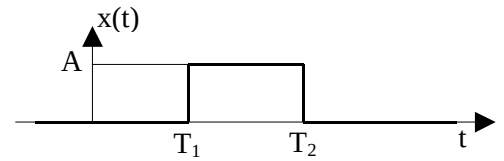


I. Réponse temporelle

I.1. $x(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = A \cdot \Gamma(t - T_1) - A \cdot \Gamma(t - T_2)$$

où $\Gamma(t)$ représente l'échelon unitaire.



I.2. Puisque la transformée de Laplace d'un échelon $\Gamma(t)$ est $\frac{1}{s}$ et qu'un retard τ s'exprime dans Laplace par $e^{-t \cdot s}$, la transformée de Laplace de $x(t)$ s'écrira alors : $X(s) = A \cdot \frac{e^{-T_1 \cdot s} - e^{-T_2 \cdot s}}{s}$

I.3. On applique $x(t)$ au système dont la fonction de transfert est : $H(s) = \frac{H_0 \cdot s \cdot e^{-t \cdot s}}{(a \cdot s + 1)^2}$

I.3.a. Le terme $e^{-t \cdot s}$ correspond dans le domaine temporel à un retard de τ .

I.3.b. Le terme a a la dimension d'un temps (secondes) puisque s est de dimension s^{-1} , et le produit $(a \cdot s)$ est sans dimension.

Pour les mêmes raisons, le terme H_0 a la dimension d'un temps (en secondes).

I.3.c. Soit $y(t)$ la sortie du système auquel on applique $x(t)$.

On a alors dans Laplace : $Y(s) = X(s) \cdot H(s)$, soit : $Y(s) = A \cdot \frac{H_0 \cdot e^{-t \cdot s} \cdot (e^{-T_1 \cdot s} - e^{-T_2 \cdot s})}{(a \cdot s + 1)^2}$

I.3.d. En notant $T'_1 = t + T_1$, $T'_2 = t + T_2$ et $K = \frac{A \cdot H_0}{a^2}$, $Y(s)$ s'écrit :

$$Y(s) = A \cdot \frac{H_0 \cdot e^{-t \cdot s} \cdot (e^{-T_1 \cdot s} - e^{-T_2 \cdot s})}{(a \cdot s + 1)^2} = \frac{A \cdot H_0}{a^2} \cdot \frac{(e^{-(t+T_1)s} - e^{-(t+T_2)s})}{\left(s + \frac{1}{a}\right)^2} = K \cdot \frac{e^{-T'_1 \cdot s} - e^{-T'_2 \cdot s}}{\left(s + \frac{1}{a}\right)^2}$$

La transformée inverse de $\left(\frac{1}{s+b}\right)^2$ étant $t \cdot e^{-b \cdot t}$, et les termes $e^{-t \cdot s}$ correspondant à des retards, le signal $y(t)$ s'écrira :

$$y(t) = K \cdot \left((t - T'_1) \cdot e^{-\frac{t-T'_1}{a}} \cdot \Gamma(t - T'_1) - (t - T'_2) \cdot e^{-\frac{t-T'_2}{a}} \cdot \Gamma(t - T'_2) \right) \quad [\text{R13d}]$$

I.4. Etude de la fonction $f(t) = t \cdot e^{-l \cdot t} \cdot \Gamma(t)$.

I.4.a. $f(0) = 0$ et $f(\infty) = 0$

I.4.b. Pente de $f(t)$:

$$f'(t) = e^{-l \cdot t} - l \cdot t \cdot e^{-l \cdot t} = e^{-l \cdot t} \cdot (1 - l \cdot t)$$

Cette pente vaut, pour $t=0$: $f'(t)=1$

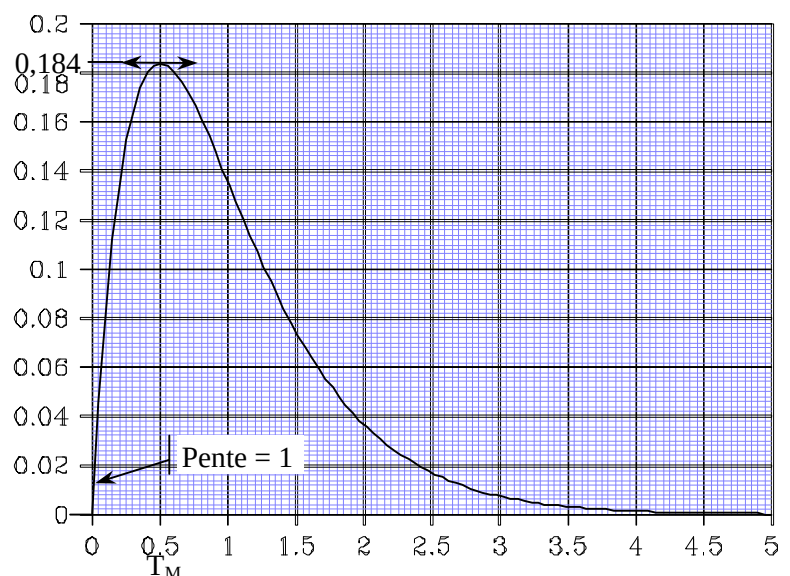
I.4.c. L'instant T_M correspondant au maximum de

$f(t)$ est trouvé lorsque $f'(t) = 0$, soit : $t = \frac{1}{l}$

On a alors $f(T_M) = \frac{e^{-1}}{l}$

I.4.d. On en déduit l'allure de $y(t)$ pour $\lambda = 2$:

On a alors $T_M = 0,5$ et $f(T_M) = 0,184$.



I.5. Allure de $y(t)$:

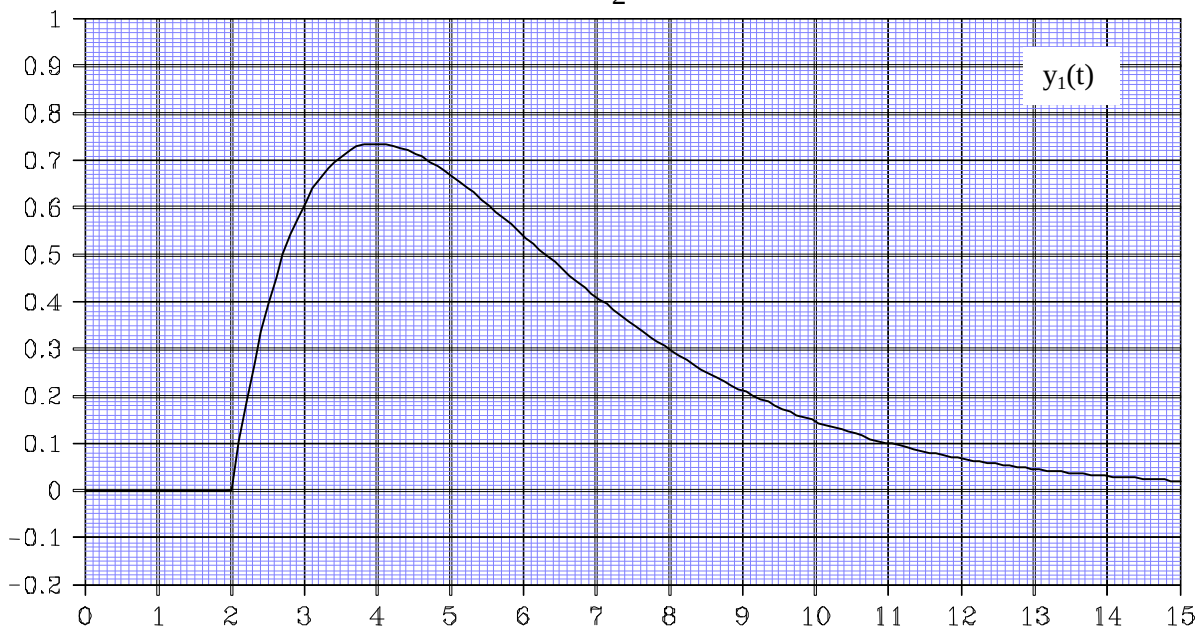
$y(t)$ est la différence de deux fonctions de la forme $f(t)$ retardées respectivement de T'_1 et T'_2 .

On peut écrire : $y(t) = K \cdot (f_1(t - T'_1) \cdot \Gamma(t - T'_1) - f_2(t - T'_2) \cdot \Gamma(t - T'_2))$

Pour $H_0=4s$, $\tau=1s$, $T_1=1s$, $T_2=2s$, $a=2s$ et $A=1$, on trouve : $K = 1$, $T'_1 = 2$ et $T'_2 = 3$.

On pose $y_1(t) = f_1(t - T'_1) \cdot \Gamma(t - T'_1)$. Dans cette expression, $f_1(t)$ représente la fonction non retardée que l'on peut écrire sous la forme $f_1(t) = t \cdot e^{-l_1 t} \cdot \Gamma(t)$, avec, selon [R13d], $l_1 = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$. On en déduit le graphe de $y_1(t)$, identique à celui de

la fonction $f(t)$ de §I.4, dans laquelle on prend $l = \frac{1}{2}$, la fonction étant retardée de T'_1 , soit 2 secondes :

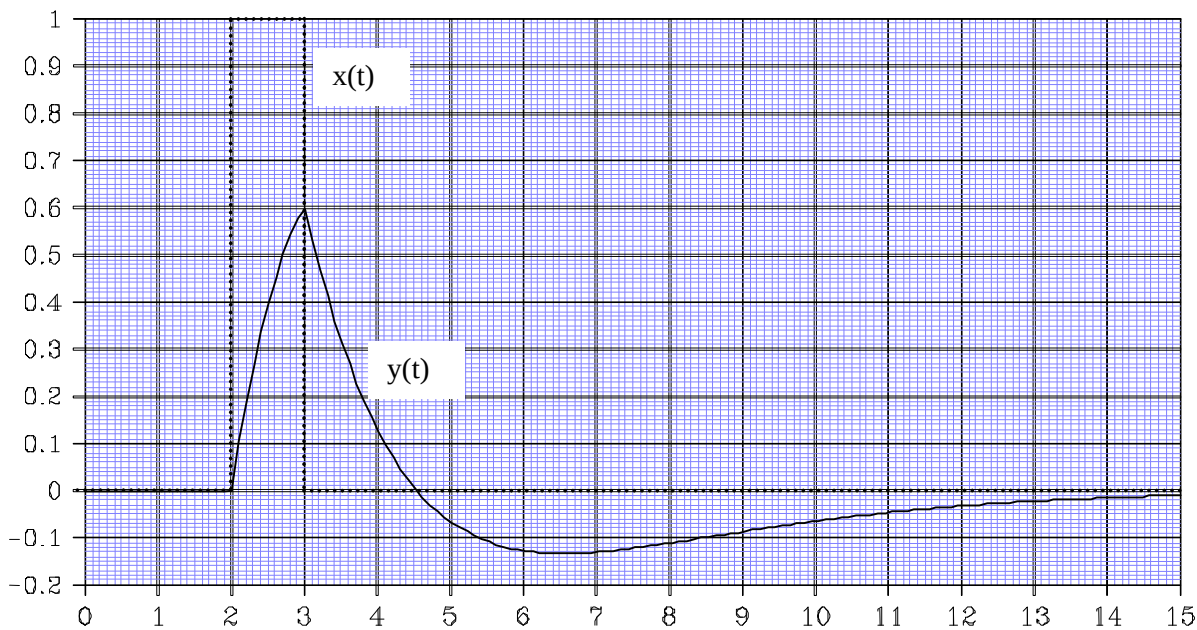


On pose $y_2(t) = f_2(t - T'_2) \cdot \Gamma(t - T'_2)$. Dans cette expression, $f_2(t)$ représente la fonction non retardée que l'on peut écrire sous la forme $f_2(t) = t \cdot e^{-l_2 t} \cdot \Gamma(t)$, avec, selon [R13d], $l_2 = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$. On en déduit le graphe de $y_2(t)$, identique à celui de

la fonction $f(t)$ de §I.4, dans laquelle on prend $l = \frac{1}{2}$, la fonction étant retardée de T'_2 , soit 3 secondes :



Et finalement, le graphe de $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$ sera :



II. Régimes initiaux et permanents :

Soit $G(s) = \frac{10 \cdot (s+1)}{s \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)}$ la fonction de transfert du système étudié.

II.1. Avec $e(t) = 2 \cdot \Gamma(t)$, on trouve : $E(s) = \frac{2}{s}$

Si on note Q la sortie du système, on a : $Q(s) = E(s) \cdot G(s)$, soit : $Q(s) = \frac{20 \cdot (s+1)}{s^2 \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)}$

La valeur de $q(0^+)$ est donnée par le théorème de la valeur initiale : $q(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot Q(s)$

d'où, ici : $q(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s \cdot 20 \cdot (s+1)}{s^2 \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)} = \frac{20 \cdot s^2}{s^5} = 0$

La valeur de $q(\infty)$ est donnée par le théorème de la valeur finale : $q(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Q(s)$

d'où, ici : $q(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot 20 \cdot (s+1)}{s^2 \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)} = \frac{20 \cdot s}{8 \cdot s^2} \rightarrow \infty$

II.2. Avec $e(t) = 5 \cdot t \cdot \Gamma(t)$, on trouve : $E(s) = \frac{5}{s^2}$

Si on note Q la sortie du système, on a : $Q(s) = E(s) \cdot G(s)$, soit : $Q(s) = \frac{50 \cdot (s+1)}{s^3 \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)}$

La valeur de $q(0^+)$ est donnée par le théorème de la valeur initiale : $q(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot Q(s)$

d'où, ici : $q(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s \cdot 50 \cdot (s+1)}{s^3 \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)} = \frac{50 \cdot s^2}{s^6} = 0$

La valeur de $q(\infty)$ est donnée par le théorème de la valeur finale : $q(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Q(s)$

d'où, ici : $q(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot 50 \cdot (s+1)}{s^3 \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)} = \frac{50 \cdot s}{8 \cdot s^3} \rightarrow \infty$

II.b. Régimes initiaux et permanents (*fonction de transfert modifiée*) :

Soit $G(s) = \frac{10 \cdot (s+1)}{(s+2)^2 \cdot (s+4)}$ la fonction de transfert du système étudié.

II.b.1. Avec $e(t) = 2 \cdot \Gamma(t)$, on trouve : $E(s) = \frac{2}{s}$

Si on note Q la sortie du système, on a : $Q(s) = E(s) \cdot G(s)$, soit : $Q(s) = \frac{20 \cdot (s+1)}{s \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)}$

La valeur de $q(0^+)$ est donnée par le théorème de la valeur initiale : $q(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot Q(s)$

d'où, ici : $q(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s \cdot 20 \cdot (s+1)}{s \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)} = \frac{20 \cdot s^2}{s^4} = 0$

La valeur de $q(\infty)$ est donnée par le théorème de la valeur finale : $q(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Q(s)$

d'où, ici : $q(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot 20 \cdot (s+1)}{s \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)} = \frac{20 \cdot s}{8 \cdot s} = 2,5$

II.b.2. Avec $e(t) = 5 \cdot t \cdot \Gamma(t)$, on trouve : $E(s) = \frac{5}{s^2}$

Si on note Q la sortie du système, on a : $Q(s) = E(s) \cdot G(s)$, soit : $Q(s) = \frac{50 \cdot (s+1)}{s^2 \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)}$

La valeur de $q(0^+)$ est donnée par le théorème de la valeur initiale : $q(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot Q(s)$

d'où, ici : $q(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s \cdot 50 \cdot (s+1)}{s^2 \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)} = \frac{50 \cdot s^2}{s^5} = 0$

La valeur de $q(\infty)$ est donnée par le théorème de la valeur finale : $q(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Q(s)$

d'où, ici : $q(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot 50 \cdot (s+1)}{s^3 \cdot (s+2)^2 \cdot (s+4)} = \frac{50 \cdot s}{8 \cdot s^2} \rightarrow \infty$

III. Etude harmonique d'un système.

On étudie la fonction de transfert $B(s) = \frac{-100 \cdot (s+0,1)}{s} = \frac{-10 \cdot \left(\frac{s}{0,1} + 1 \right)}{s}$

III.1. Cette fonction de transfert peut se décomposer sous la forme :

$$B(s) = B_1(s) \cdot B_2(s) \cdot B_3(s)$$

avec :

$$B_1(s) = -10$$

$$B_2(s) = \frac{1}{s}$$

$$\text{et } B_3(s) = \left(\frac{s}{0,1} + 1 \right).$$

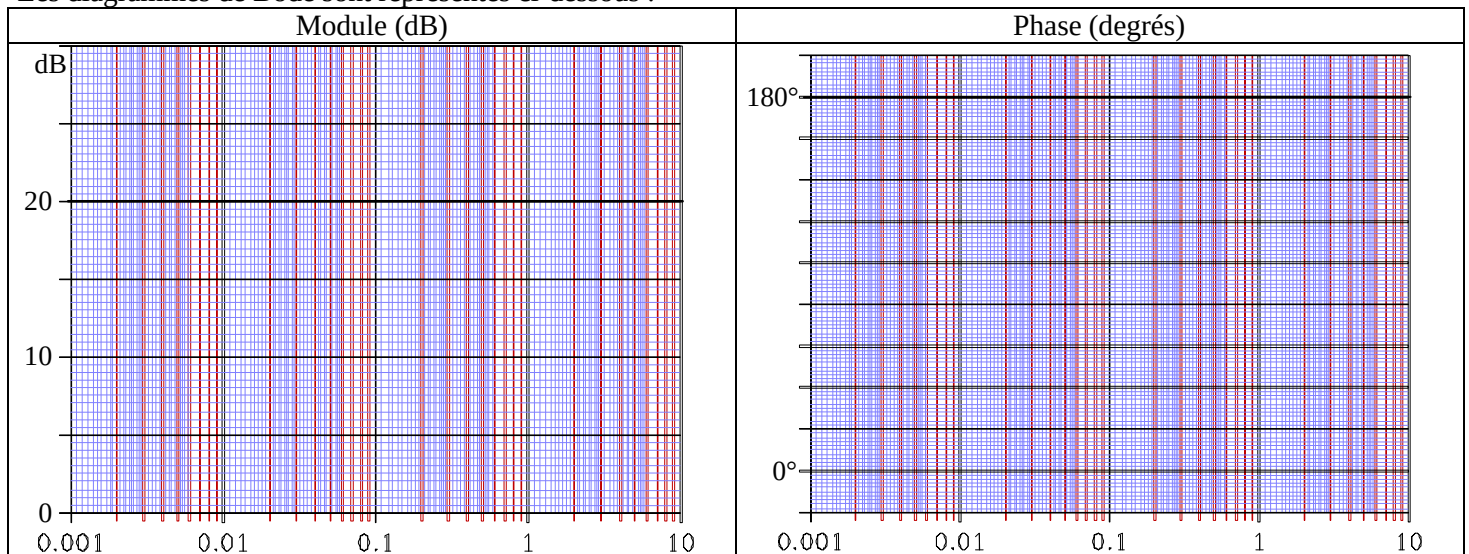
Etude de $B_1(s)$:

$$B_1(s) = -10$$

Le module de $B_1(j\omega)$ est constant et vaut 10, soit $20 \cdot \log(10) = 20 \text{ dB}$.

La phase de $B_1(j\omega)$ est constante et vaut π , puisque $B_1(s)$ est un réel négatif.

Les diagrammes de Bode sont représentés ci-dessous :



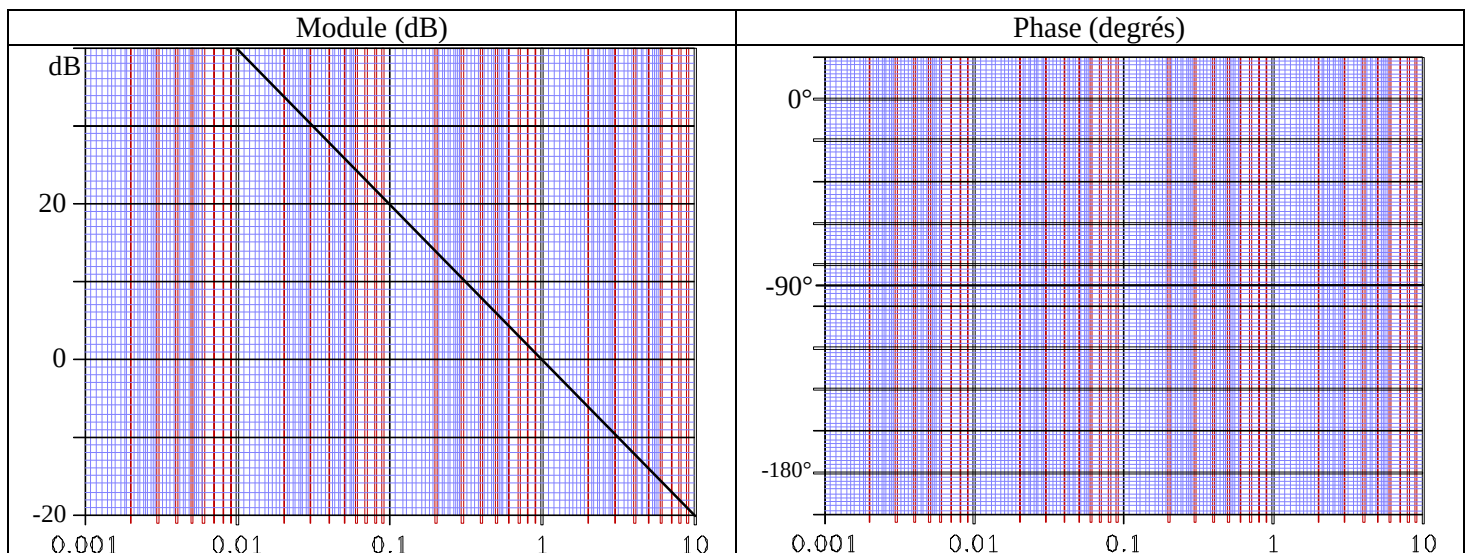
Etude de $B_2(s)$:

$$B_2(s) = \frac{1}{s} \text{ d'où } B_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega}.$$

Le module de $B_2(j\omega)$ s'écrit : $|B_2(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$, soit : $|B_2(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\omega}\right) = -20 \cdot \log(\omega)$

Ceci correspond dans un système d'abscisse logarithmique à une droite de pente -20 dB/décade , passant par le point $[1 \text{ rad/s}, 0 \text{ dB}]$.

$B_2(j\omega)$ est un imaginaire pur. Sa phase est donc constante et correspond à celle de $\frac{1}{j} = -j$; Elle vaut $-\frac{\pi}{2}$.



Etude de $B_3(s)$:

$$B_3(s) = \left(\frac{s}{0,1} + 1\right) \text{ d'où } B_3(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{0,1} + 1\right)$$

Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $B_3(j\omega) \rightarrow 1$

On a donc $|B_3(j\omega)| = 1$ et $|B_3(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB}$

et la phase est celle du nombre réel 1 ; Elle vaut donc dans ce cas 0 radian.

Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $B_3(j\omega) \rightarrow \frac{j\omega}{0,1}$

On a donc $|B_3(j\omega)| = \frac{\omega}{0,1}$ et $|B_3(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log(\omega) - 20 \cdot \log(0,1) = 20 \cdot \log(\omega) + 20$

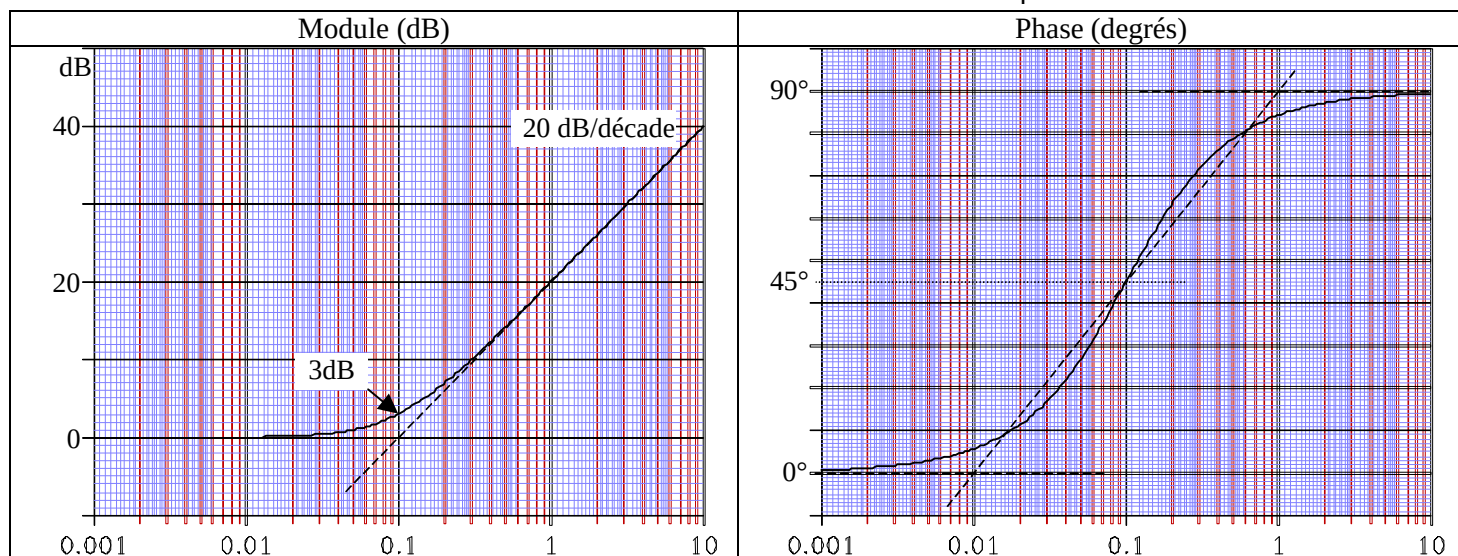
Ceci correspond dans un système d'abscisse logarithmique à une droite de pente +20 dB/décade, passant par le point [0,1 rad/s; 0dB].

$B_3(j\omega)$ est ici un imaginaire pur. Sa phase est donc constante et correspond à celle de j ; Elle vaut donc $+\frac{p}{2}$.

Lorsque $\omega = 0,1$ $B_3(j\omega) = \left(\frac{j \cdot 0,1}{0,1} + 1 \right) = 1 + j$

On a donc $|B_3(j\omega)| = \sqrt{2}$ et $|B_3(j\omega)|_{dB} = 3dB$

et la phase est celle du nombre complexe $1+j$; Elle vaut donc dans ce cas $+\frac{p}{4}$.



III.3. Diagrammes de Bode correspondant à $B(j\omega)$:

Pour obtenir le diagramme de Bode de $B(s)$, il suffit de faire la somme point par point des diagrammes de Bode de $B_1(s)$, $B_2(s)$ et $B_3(s)$. On obtient alors :

